4.3 22/7 大于 π

工作纸

题目

STEP I 1997，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/97-s1-q6

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有*停一停*，*试一试*的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

想一想 为甚么 $\int_0^1 \frac{\text{多项式}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ 会算出 π 来？这种形式的积分之中，哪一个简单的积分本身就给出 π？

阶段 1 多项式除法

涵盖：除以 x^2+1 的运算

想一想 先展开 $x^4(1-x)^4$。

停一停，试一试 用长除法(long division),或由最高次项起比较系数(comparing coefficients)，除以 x^2+1。余式（remainder）是甚么?

阶段 2　积分

涵盖：等于 $\frac{22}{7} - \pi$ 的积分

想一想　把你得到的恒等式（identity）除以 $1 + x^2$，然后由 0 至 1 逐项积分。哪一个积分会得出 π?

阶段 3 估计积分的上下界

涵盖：π 的上下界

想一想 被积函数（integrand）在 $(0,1)$ 上恒为正。由此可以即时得出甚么结论？

停一停，试一试 在 $[0,1]$ 上，$\frac{1}{1+x^2}$ 最大可以是多少？最小又可以是多少？利用这一点求出积分的上下界（bounds），并计算 $\int_0^1 x^4(1-x)^4\,\mathrm{d}x$。

背后的数学

一个有来历的证明

阿基米德（Archimedes）约于公元前 250 年证明了 $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$，方法是计算圆内接和圆外切正 96 边形的周界（可与 Section 2.5 中的多边形比较）。积分证明则晚近得多。它由 D. P. Dalzell 于 1944 年发表，其后在 1968 年被选为美国大学本科生普特南数学竞赛（Putnam competition）的题目，因而广为人知。它的迷人之处在于完全不需要任何数值计算：不等式 $\frac{22}{7} > \pi$ 直接来自“正函数的积分为正”这个事实。

用同一思路得出更佳的近似值

这个方法可以推广。以 $x^8(1-x)^8$ 取代 $x^4(1-x)^4$，同样的除法给出

$$\int_0^1 \frac{x^8(1-x)^8}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 4\pi - \frac{188684}{15015},$$

由此证明 $\pi > \frac{47171}{15015} = 3.1415917\ldots$，准确至六位有效数字（significant figures）。2009 年，Stephen Lucas 找到了多族这类被积函数非负的积分，它们能证明关于其他著名近似值的不等式，其中包括准确至七位有效数字的 $\frac{355}{113}$。

近似值与无理性

为甚么 π 会有 $\frac{22}{7}$ 和 $\frac{355}{113}$ 这样好的分数近似值？每个无理数（irrational number）都有无穷多个分数 $\frac{p}{q}$ 与它相距不超过 $\frac{1}{q^2}$，而 π 碰巧在很早的阶段就有几个特别好的，因为它的连分数（continued fraction）$[3;7,15,1,292,\ldots]$ 含有 292 这个很大的项（见 Section 2.2）。像本题这样的积分，若令其愈来愈小，便是另一类证明的起点：这类证明指出某些数不可能被分数逼近得太好，因而是无理数。Ivan Niven 那个著名的、只有一页的 π 是无理数的证明（1947 年），用的就是 $\frac{x^n(1-x)^n}{n!}\sin(\pi x)$ 的积分，它们是 Section 2.9 中那些积分的三角函数近亲。

延伸练习

1 **核对数字。**计算 $\frac{22}{7} - \pi$ 至四位有效数字，并确认它介乎 $\frac{1}{1260}$ 与 $\frac{1}{630}$ 之间。

2 **一个 Beta 积分。**利用公式 $\int_0^1 x^n(1-x)^n\,\mathrm{d}x = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$（在 Section 4.4 中证明）验证 $\int_0^1 x^4(1-x)^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{630}$。

3 **一个偏小的近似值。**证明

$$\int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} \quad 及 \quad \int_0^1 \frac{x^2(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi - \frac{47}{15},$$

并由此推出 $\pi > 3$ 及 $\pi > \frac{47}{15}$。为甚么这些近似值不及 $\frac{22}{7}$ 准确？

4 **更进一步。**较难验证上文给出的 $\int_0^1 \frac{x^8(1-x)^8}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ 的恒等式。（除法可以交给电脑代数系统去做；重点是看出余式是 16，从而得出 4π。）

延伸阅读

- **Petr Beckmann, *A History of* π**（St Martin's Press）。详细讲述阿基米德的多边形方法，另有许多其他内容。

- **Stephen Lucas, "Approximations to π derived from integrals with nonnegative integrands"**, *American Mathematical Monthly* 116 (2009)。篇幅短小，容易阅读。
- **Ivan Niven, *Irrational Numbers*** (Mathematical Association of America)。收录了 Niven 对 π 是无理数的证明。

完整的引导式解答见第 4.3 节：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch04/twenty-two-sevenths.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com