4.2 由一个积分建立三角学

工作纸

题目

STEP III 2017，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/17-s3-q6

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有*停一停，试一试*的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

想一想　第 (i) 和第 (ii) 部分分别对应哪些三角恒等式（trigonometric identities）？（想想 $\arctan x + \arctan \frac{1}{x}$，以及 $\tan(A+B)$ 的公式。）

阶段 1　反射 $u \mapsto 1/u$

涵盖：第 (i) 部分

停一停，试一试　在 $\mathrm{T}(x)$ 中代入 $u = 1/w$。被积函数（integrand）会变成甚么？积分上下限（limits）又会怎样？

阶段 2 加法代换

涵盖：第 (ii) 部分

想一想 用商法则（quotient rule）对 $v = \frac{u+a}{1-au}$ 求导。然后把 $1 + v^2$ 写成单一分数，再作比较。

停一停，试一试 于是 $\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2}$：这个代换（substitution）不会改变被积函数。它对 $\mathrm{T}(x)$ 的积分上下限有甚么影响?

阶段 3　另外两个恒等式

涵盖：第 (ii) 部分

想一想　使用第 (i) 部分两次，把 $\mathrm{T}(x)$ 和 $\mathrm{T}(a)$ 换掉。然后重新命名：设 $y = 1/x$ 及 $b = 1/a$。条件 $x < 1/a$ 会变成甚么？

阶段 4 特殊值

涵盖：第 (iii) 部分

停一停，试一试 求 $\mathrm{T}(\sqrt{3})$：在最后一个恒等式（identity）中选取 y 和 b，使 $\frac{y+b}{by-1}$ 刚好等于 y 本身。

想一想 求 $\mathrm{T}(\sqrt{2}-1)$：在加法恒等式中取 $x=a=\sqrt{2}-1$。$\frac{2x}{1-x^2}$ 等于甚么？而第 (i) 部分又给出 $\mathrm{T}(1)$ 的甚么结果？

背后的数学

建构初等函数

在严格的分析课程中，函数 exp、sin、cos 和 ln 不能随便假设存在；它们必须被*建构*出来，其性质也必须加以证明。标准的做法有三种。你可以用幂级数（power series）来定义它们（$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots$）。你可以把它们定义为微分方程（differential equation）的解，就如练习中那道 1986 年样本试卷的题目（$\mathrm{f}' = \mathrm{f}$、$\mathrm{f}(0) = 1$ 定义了 exp）。你也可以像这里一样，用积分来定义反函数（inverse function）：$\ln x = \int_1^x \frac{\mathrm{d}u}{u}$ 和 $\arctan x = \int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$，

然后定义 $\pi = 2\int_0^\infty \frac{du}{1+u^2}$。每种做法各有所长，而证明它们全都给出相同的函数，是一道令人满足的练习。试与 Section 3.8 的函数方程（functional equation）做法比较。

圆以外：椭圆积分

积分的做法可以推广，而三角形的做法却做不到。1718 年，Giulio Fagnano 研究双纽线（lemniscate）这条 8 字形曲线的弧长（arc length），由此引出 $\int_0^x \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}$，并找到一个能把弧长加倍的代换，正如我们的代换把 T 加倍一样。欧拉（Euler）在 1751 年读到 Fagnano 的著作，找出了完整的加法公式；这最终经由阿贝尔（Abel）和雅可比（Jacobi），发展成椭圆函数（elliptic functions）的理论：椭圆函数就是这类积分的反函数，它们之于双纽线，正如 sin 和 cos 之于圆。我们在高斯（Gauss）关于算术几何平均（AGM）的工作中（Section 2.6）遇过同一个积分。椭圆函数如今是数论的核心；Section 1.9 的椭圆曲线（elliptic curves）就是它们在几何上的投影。

计算 π

加法恒等式也是计算 π 的那些最著名公式的基础。举例说，反复运用它可以证明 $\mathrm{T}(1) = 4\mathrm{T}(\frac{1}{5}) - \mathrm{T}(\frac{1}{239})$，这就是 1706 年的梅钦公式（Machin's formula）；配合级数 $\mathrm{T}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$，它算出了 π 的 100 位数字，并在其后两个半世纪一直是首选的方法。这是 Section 5.1 的主题。

延伸练习

1. **指数函数与余弦。**试做 STEP II Specimen paper，第 6 题（step.maths.org/questions/spec-s2-q6）。这道题只凭指数函数和余弦各自的微分方程，推导出它们的加法公式。（提示：对于余弦，找出两个理应为零的组合，并证明它们的平方和是常数。）

2. **反正弦。**试做 STEP III 2007，第 7 题（step.maths.org/questions/07-s3-q7）。这道题用处理本节积分的同一手法来处理反正弦（inverse sine），并以一个代换把两者联系起来。

3. **一条早期的梅钦型公式。**利用加法恒等式证明 $\mathrm{T}(\frac{1}{2}) + \mathrm{T}(\frac{1}{3}) = \mathrm{T}(1) = \frac{1}{2}\mathrm{T}_\infty$。

4. T_∞ **是有限的。**证明对所有 $x \geq 1$ 都有 $\mathrm{T}(x) \leq 1 + \int_1^x \frac{du}{u^2} < 2$，解释为甚么当 $0 < x < 1$ 时同样有 $\mathrm{T}(x) < 2$，并由单调收敛定理（monotone convergence theorem）（Section 2.2）推断 T_∞ 存在。

延伸阅读

- **Tom Körner, *Calculus for the Ambitious***（Cambridge University Press）。严格地建构初等函数，并讨论各种不同的做法。
- **Walter Rudin, *Principles of Mathematical Analysis***（McGraw-Hill）。即著名的“baby Rudin”；第 8 章的引言只用寥寥数页，便优雅地由幂级数建构出 exp、sin 和 cos。程度较深。
- **Victor Prasolov & Yuri Solovyev, *Elliptic Functions and Elliptic Integrals***（American Mathematical Society）。想知道双纽线通往何处，可读此书。程度较深。

完整的引导式解答见第 4.2 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch04/trig-from-integral.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com