4.1 甚么是积分?

工作纸

题目

STEP III 1989，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/89-s3-q10

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有停一停，试一试的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

想一想 第 (iii) 部分的两个和，都是阔度为 $\frac{a}{n}$ 的矩形的面积之和。对于递增函数（increasing function）f，哪一个和低估了曲线下的面积，哪一个高估了？

阶段 1 可以裂项相消的和

涵盖：第 (i) 部分

想一想 设 $P(r) = r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)(r+5)$，即六个连续整数（consecutive integers）之积。计算 $P(r) - P(r-1)$：两者有哪些共同的因子?

停一停，试一试 把你的结果由 $r = 1$ 加到 n。大部分的项都会互相抵消。然后比较 r^5 与 $r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)$。

阶段 2　下界

涵盖：第 (ii) 部分

停一停，试一试　改用一个向下数、以 r 结尾的连续整数之积，重复同样的做法：$(r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r$。由 $r=0$ 加到 $n-1$，并把每一项与 r^5 比较。为甚么这个不等式（inequality）是严格的？

阶段 3 **积分**

涵盖：第 (iii) 部分

想一想 对于递增函数（increasing function），两个和之中哪一个低估了面积，哪一个高估了面积?

停一停，试一试 把 $\mathrm{f}(x) = x^5$ 的两个和都用 $\sum r^5$ 表示，并运用第 (i) 及第 (ii) 部分的结果。当 $n \to \infty$ 时，这些上下界趋向甚么?

背后的数学

黎曼的定义

把细长条加起来求面积的想法，可追溯至阿基米德（Archimedes）：他在公元前 250 年左右，正是用这个论证的一个版本求出抛物线下的面积。牛顿（Newton）和莱布尼兹（Leibniz）把积分变成微分的逆运算，其后一个半世纪，大多数人都是这样理解积分的。1854 年，黎曼（Bernhard Riemann）提出了大学课程至今仍用作起点的定义：把 $[a, b]$ 分成许多小段，构作（阔度）$\times$（f 在该小段内某处的高度）之和；若小段不断缩小时，所有这样的和都趋向同一个极限，便说 f 可积（integrable）。本题的版本采用等阔长条

和左右端点，是一个适用于递增函数的特殊情况；达布（Jean-Gaston Darboux）的“上和与下和”则把一般情况处理得干净利落。

并非每个函数都有积分

有了精确的定义，便可以问哪些函数可积。闭区间上的每个连续函数都可积，每个递增函数也可积。但试考虑狄利克雷（Dirichlet）函数：若 x 是有理数，$\mathrm{f}(x) = 1$；若是无理数，则为 0。每一条长条无论多窄，都同时包含有理数和无理数，所以每个上和都是 1，每个下和都是 0。两者永不一致，因此 $\int_0^1 \mathrm{f}$ 在黎曼的意义下并不存在。1902 年，勒贝格（Henri Lebesgue）发明了一种更强大的积分，能够处理这个函数（它的勒贝格积分（Lebesgue integral）是 0），而且在取极限时表现好得多。勒贝格积分是现代概率论的基础，你会在大学二年级或三年级遇上它。

离散微积分

第 1 阶段的裂项相消，其实是乔装了的微积分。“上升阶乘”（rising factorial）$r(r+1)\cdots(r+k-1)$ 在求和之下的表现，与 x^k 在积分之下的表现完全一样：求和令因子的数目增加一个，并除以新的因子数目，正如 $\int x^k \,\mathrm{d}x = \frac{x^{k+1}}{k+1}$。和与积分、差分与导数之间的这种对应，称为*有限差分演算*（calculus of finite differences），是计算和式的有力工具。

延伸练习

1 **把极限化为积分。**试做 STEP III 1999，第 3 题（step.maths.org/questions/99-s3-q3）。这道题把和的极限化为积分：在每个和式中，找出曲线下的矩形。

2 **阿基米德的抛物线。**利用 $\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ 和第 (iii) 部分的定义，证明 $\int_0^a x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}a^3$。

3 **上升阶乘。**证明对每个正整数 k，都有 $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} r(r+1)\cdots(r+k-1) = \frac{n(n+1)\cdots(n+k)}{k+1}$。

4 **准确的和。**利用恒等式 $r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4) = r^5 + 10r^4 + 35r^3 + 50r^2 + 24r$，以及 $\sum r^k$ 在 $k \le 4$ 时的已知公式，求出 $\sum_{r=1}^{n} r^5$ 的准确值。

延伸阅读

- **David Bressoud, *A Radical Approach to Lebesgue's Theory of Integration***（Cambridge University Press）。由黎曼积分走到勒贝格积分的故事，以逼出每一步发展的问题为线索娓娓道来。

- **Michael Spivak, *Calculus***（Cambridge University Press）。第 13 章以上和与下和定义积分，与本节完全一样。
- **Graham, Knuth & Patashnik, *Concrete Mathematics***（Addison-Wesley）。第 2 章建立有限差分演算，并讨论上升阶乘和下降阶乘。

完整的引导式解答见第 4.1 节：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch04/riemann.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com