3.9 创造一个新函数

工作纸

题目

STEP II 2021，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2021 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停”或“试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　“解”一条方程，究竟是甚么意思？$x=\sqrt{2}$ 是 $x^2=2$ 的解，还是只不过是那个解的名字？

阶段 1 曲线 $y = xe^x$

涵盖：第 (i) 部分

? **想一想** 对 xe^x 求导。驻点（stationary point）在哪里？它属于哪一类？

? **想一想** 当 $x \to +\infty$ 及 $x \to -\infty$ 时，xe^x 会怎样？曲线在哪里与坐标轴相交？

阶段 2　反函数

涵盖：第 (ii) 部分

停一停，试一试　要有反函数（inverse function），f 在 $[a, \infty)$ 上必须是一对一（one-to-one）的。符合要求的最小 a 是甚么？把曲线沿 $y = x$ 反射，绘出 $y = \mathrm{g}(x)$ 的草图。

阶段 3 四条方程

涵盖：第 (iii) 部分

想一想 定义性质是 $g(z)\,e^{g(z)} = z$。在每一小题中，目标都是化成 (某式) $e^{(同一式)} =$ (某数) 的形式。对于 (a)，两边乘以 e^x。

想一想 在 (b) 和 (c) 中，未知数以 $x \ln x$ 的形式出现。哪一个代换（substitution）可以把 $x \ln x$ 变成 ue^u 的形式？

停一停，试一试 记住 ue^u 的最小值。对于 (c)，$ue^u = -\frac{1}{3}$ 有多少个解？g 给出的是哪一个？对于 (d)，两边取指数，并设法令指数成为 x 的倍数。

阶段 4　$x^x = 10$

涵盖：第 (iv) 部分

? **想一想**　先取对数（logarithm），然后使用与 (b) 和 (c) 相同的代换。

背后的数学

历史悠久、名字却很新的函数

兰伯特（Johann Heinrich Lambert）在 1758 年研究过这类方程，欧拉（Euler）在 1783 年作了进一步的研究。但这个函数一直没有标准名称，直到 1990 年代，电脑代数系统（computer algebra system）Maple 的开发者需要为它起一个名字。1996 年，Robert Corless、Gaston Gonnet、David Hare、David Jeffrey 和 Donald Knuth 发表了论文“On the Lambert W function”，汇集了它的性质和应用。这篇论文已被引用数千次，而 W 现已内置于大多数数学软件之中。题目中的函数 g 是主分支（principal branch）W_0；图 3.9.1（见网上该节的完整版）中的虚线，即给出 (c) 和 (d) 中第二个根的那条曲线，是另一个实分支 W_{-1}。

W 出现在哪里

- **维恩位移定律（Wien's displacement law）。**热的物体辐射最强的波长与其温度成反比。当中的常数来自解方程 $5(1-e^{-x}) = x$，其正数解为 $x = 5 + W\left(-5e^{-5}\right) \approx 4.965$。这就是为甚么约 5800 K 的太阳看起来是黄白色，而温度较低的红矮星看起来是红色。
- **幂塔（power tower）。**无穷幂塔 $x^{x^{x^{\cdots}}}$ 在 $e^{-e} \le x \le e^{1/e}$ 时收敛（converge），其值为 $\dfrac{W(-\ln x)}{-\ln x}$。
- **人口与传染病模型。**在最简单的模型中，一场传染病的最终规模，以及某些增长模型中达到指定人口所需的时间，都由 W 给出。

初等函数

W 真的是新函数吗？还是可以用 exp、ln、根式和三角函数写出来？它确实是新的：一条可追溯至 1830 年代刘维尔（Joseph Liouville）的定理表明，W 不是*初等函数*（elementary function）。同一套理论还表明，一些看似平平无奇的积分，例如 $\int e^{-x^2}\,dx$，无法用初等函数表示，这就是为甚么正态分布（normal distribution）需要自己专用的特殊函数。

延伸练习

1 **二、四，还有一个。**方程 $x^2 = 2^x$ 有显而易见的解 $x = 2$ 和 $x = 4$（比较 Section 3.5）。证明它还有一个负数解，而这个解是

$$x = -\frac{2}{\ln 2}\, g\left(\frac{\ln 2}{2}\right) \approx -0.767.$$

2 **一个导数。**对 $g(x)e^{g(x)} = x$ 作隐函数微分（implicit differentiation），证明当 $x \neq 0$ 时，

$$g'(x) = \frac{g(x)}{x\big(1 + g(x)\big)}.$$

在 $x = -\frac{1}{e}$ 处会怎样？

3 **一个积分。**利用代换 $x = we^w$ 证明 $\displaystyle\int_0^e g(x)\,dx = e - 1$。

4 **幂塔。**假设幂塔 $T = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}}$ 收敛，证明 $T = \sqrt{2}^T$，并由此推出 $T = 2$ 或 $T = 4$。究竟是哪一个？（计算数列 $t_1 = \sqrt{2}$、$t_{n+1} = \sqrt{2}^{t_n}$ 的头几项，并想想 Section 2.2 中的蛛网图（cobweb diagram）。）

延伸阅读

- **Robert Corless et al., "On the Lambert W function"**，*Advances in Computational Mathematics* 5 (1996)。为这个函数命名的论文。读完本节之后，论文的头几节应可读懂。
- **Brian Hayes, "Why W?"**，*American Scientist* 93 (2005)。一篇生动的文章，讲述这个函数的历史和用途。可在网上免费阅读。
- **Brian Conrad, "Impossibility theorems for elementary integration"**。网上可找到的讲义，解释刘维尔的理论。程度较深。

完整的引导式解答见第 3.9 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch03/lambert-w.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmc-nulty.substack.com