3.8 由加法公式决定的函数

工作纸

题目

STEP III 2019，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2019 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停”或“试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　这条方程对所有 x 和 y 都成立。最值得首先尝试的是甚么？

阶段 1 在零处的值

涵盖：第 (i) 部分

想一想 这条等式对所有 x 和 y 都成立。代入 $x = y = 0$。$\mathrm{f}(0)$ 可能取哪些值?

停一停，试一试 假如 $\mathrm{f}(0) = 0$，会出现甚么问题? 代入 $y = 0$。

阶段 2　由零处的导数（derivative）得出各处的导数

涵盖：第 (i) 部分

> **停一停，试一试**　在 $\mathrm{f}'(x)$ 的定义中，写成 $\mathrm{f}(x+h)=\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(h)$。哪一部分可以抽到极限（limit）之外？余下的极限又是甚么？

阶段 3　解 $\mathrm{f}'=k\mathrm{f}$

涵盖：第 (i) 部分

> **想一想**　考虑 $\mathrm{f}(x)\,e^{-kx}$。它的导数是甚么？

阶段 4　第二条法则

涵盖：第 (ii) 部分

想一想　在 g 的法则中代入 $y = 0$。由此可知 $\mathrm{g}(0)$ 有甚么性质？$|\mathrm{g}(x)| < 1$ 这个条件在哪里派上用场？

停一停，试一试　利用该法则把 $\mathrm{g}(x+h) - \mathrm{g}(x)$ 写成单一分数，化简后除以 h，再令 $h \to 0$。

阶段 5　求解

涵盖：第 (ii) 部分

> **停一停，试一试**　分离变量（separate the variables）。当 $|g| < 1$ 时，哪个函数的导数是 $\frac{1}{1-g^2}$？

背后的数学

相对论中的速度

在日常生活中，如果一列火车以速率 u 行驶，而你在车厢内以速率 v 向前走，你相对于地面的速率就是 $u + v$。爱因斯坦在 1905 年证明这只是一个近似。正确的法则（其中 c 为光速）是

$$u \oplus v = \frac{u + v}{1 + uv/c^2}.$$

若以 c 的分数来量度速率，这正是 g 的规则。我们的结果说明，如果把每个速度写成 $v = \tanh\phi$,那么速度的合成就是把各个 ϕ 相加。$\phi = \operatorname{artanh} v$ 这个量称为快度(rapidity)。火箭引擎每次推进都会增加固定份量的快度，但由于对每个 ϕ 都有 $\tanh\phi < 1$，速度只会愈来愈接近光速，却永远达不到（图 3.8.1）。把 $0.9c$ 与 $0.9c$ 合成，得到的不是 $1.8c$，而是 $\frac{1.8}{1.81}c \approx 0.9945c$。

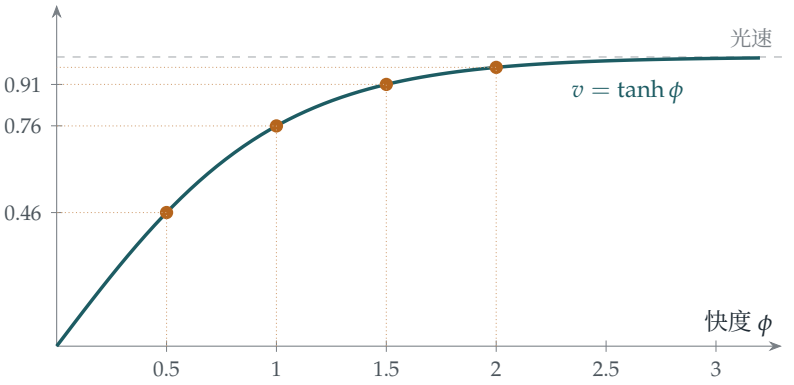

图 3.8.1 速度（以光速的分数表示）对快度的图像。快度每次增加相同的份量（引擎每次相同的推进所提供的正是这样），速度的增幅却愈来愈小：0.46、0.76、0.91、0.96、...，永远达不到 1。

柯西函数方程

最简单的函数方程是 $f(x+y) = f(x) + f(y)$，柯西（Cauchy）在 1821 年研究过它。如果 f 可微，用本题的方法可证明 $f(x) = kx$。事实上只要连续就够了。但若完全不作任何正则性（regularity）假设，就会有其他极其怪异的解，它们的图像稠密地散布在整个平面上。Georg Hamel 在 1905 年构造出这些解；这个构造需要用到*选择公理*（axiom of choice），而且不可能把其中任何一个明确地写出来。这就是题目坚持 f 可微的原因之一：这个假设并非例行公事。

同态

$f(x+y) = f(x)f(y)$ 的意思是，f 把实数的加法变成正实数的乘法，并且保持两者的结构。用大学一年级代数的语言来说，f 是由 $(\mathbb{R}, +)$ 到 $(\mathbb{R}_{>0}, \times)$ 的*群同态*（group homomorphism），而对数就是它的反函数。数学中许多最重要的函数，都是这样由它们所保持的结构来刻划的。在 Section 7.6 中，我们会看到 tanh 的几何意义：它量度的是“双曲角”（hyperbolic angle），而它的加法定律来自双曲旋转的复合。

延伸练习

1 **正切的规则。**设 g 可微，$g'(0) = k \neq 0$，且只要等式两边都有定义，就有 $g(x+y) = \dfrac{g(x)+g(y)}{1-g(x)g(y)}$。证明 $g'(x) = k\big(1+g(x)^2\big)$，并由此推出在 $x = 0$ 附近 $g(x) = \tan kx$。

2 **柯西方程。**若 f 可微，且对所有 x、y 都有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$，证明 $f(x) = kx$。

3 **不用导数。**较难只假设 $f(x+y) = f(x)f(y)$ 及 $f(1) = a > 0$。证明对正整数 n 有 $f(n) = a^n$，然后证明 $f(1/n) = a^{1/n}$，再证明对每个正有理数 q 都有 $f(q) = a^q$。（为甚么要再进一步就需要连续性?）

4 **火箭科学。**一枚火箭每次点火，都能相对于它当时所处的参考系把速率增加 $0.5c$。由静止开始，经过 2、3 和 4 次点火后，它（相对于起点）的速率是多少？请使用快度。

延伸阅读

- **Christopher Small, *Functional Equations and How to Solve Them***（Springer）。一本浅白易读的函数方程入门书，以喜欢解题的读者为对象。
- **Edwin Taylor & John Wheeler, *Spacetime Physics***（W. H. Freeman）。狭义相对论的经典入门书，全书都使用快度。
- **Tom Körner, *Calculus for the Ambitious***（Cambridge University Press）。由指数函数和三角函数的性质出发来定义它们，与本节的精神完全一致。

完整的引导式解答见第 3.8 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch03/addition-laws.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com