3.7 $\pi^2 \leq 10$

工作纸

题目

STEP II 2014，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/14-s2-q2

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停，试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　一个在 $[0,\pi]$ 两端都为零的函数，如果在中间取值很大，为甚么就必须很陡？条件 $f(0)=f(\pi)=0$ 为甚么重要？

阶段 1　正弦波（sine wave）

涵盖：第 (i) 部分

> **想一想**　利用 $\sin^2\theta=\tfrac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$ 和 $\cos^2\theta=\tfrac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$，求出 $\int_0^{\pi}\sin^2 nx\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^{\pi}\cos^2 nx\,\mathrm{d}x$。

阶段 2 端点条件（end conditions）很重要

涵盖：第 (i) 部分

想一想 找一个满足 $f(0) \neq 0$ 而令 $(*)$ 不成立的简单函数。然后再找一个满足 $f(0) = 0$ 但 $f(\pi) \neq 0$ 的例子。

阶段 3　一条抛物线（parabola）

涵盖：第 (ii) 部分

想一想　哪一个二次函数（quadratic）在 $x = 0$ 和 $x = \pi$ 处的值为零？为甚么乘上一个常数倍并无影响？

停一停，试一试　对 $\mathrm{f}(x) = x(\pi - x)$ 求出两个积分。代换（substitution）$u = x - \frac{\pi}{2}$ 可令两个被积函数（integrand）都变成偶函数（even function）。

阶段 4 一个三角函数的选择

涵盖：第 (ii) 部分

想一想 $f(0) = 0$ 和 $f(\pi) = 0$ 对 p、q、r 施加了甚么条件?

停一停，试一试 求出 $\int_0^\pi f^2$ 和 $\int_0^\pi (f')^2$。留意 $\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 = 1 + \sin x$，这会很有帮助。由此可得出关于 π 的甚么不等式?

阶段 5　哪一个较好?

涵盖：第 (ii) 部分

> ? **想一想**　把你所得的 π 的界（bound）平方，再与由抛物线得出的界作比较。

背后的数学

用傅里叶级数的证明

为甚么 $(*)$ 成立？到了大学你会学到，$[0,\pi]$ 上任何在两端都为零的合理函数，都可以写成傅里叶正弦级数（Fourier sine series）：

$$\mathrm{f}(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots .$$

由于当 $m \neq n$ 时 $\int_0^\pi \sin mx \sin nx \,\mathrm{d}x = 0$，平方后再积分，所有交叉项都会消失，得出

$$\int_0^\pi \mathrm{f}^2 = \frac{\pi}{2}\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \cdots\right), \qquad \int_0^\pi (\mathrm{f}')^2 = \frac{\pi}{2}\left(1^2 b_1^2 + 2^2 b_2^2 + 3^2 b_3^2 + \cdots\right).$$

右式的每一项都不小于左式的对应项，这就证明了 $(*)$，同时说明等号只在 f 是 $\sin x$ 的倍数时成立。题目的第 (i) 部分就是只有一项的情况。

振动的弦与量子粒子

比值 $\int (\mathrm{f}')^2 / \int \mathrm{f}^2$ 称为瑞利商（Rayleigh quotient），而 $(*)$ 说的是：对于固定在 0 和 π 的函数，它的最小可能值是 1。这个数有物理意义。对一条两端固定的弦来说，$\int (\mathrm{f}')^2$ 量度拉伸的能量，$\int \mathrm{f}^2$ 量度位移的大小，而这个比值的最小值决定了弦所能奏出的最低音。在量子力学（quantum mechanics）中，同一个最小值就是困在盒子里的粒子的最低能量：它不可能是零，因为两端固定的波必须弯曲。瑞利勋爵（Lord Rayleigh）正是用这一招——猜一个测试函数，再计算比值——来估计振动系统的频率；由于极端情况给出最小值，任何猜测都会给出真正最低频率的一个上界，而好的猜测更会给出非常准确的上界。

变分法

找出令某个积分之比取得最小值的函数, 是*变分法*(calculus of variations)的问题, 当中的未知量是整个函数,而不是一个数。这里取得最小值的函数 $\sin x$ 满足微分方程(differential equation) $f'' + f = 0$，而这并非巧合：求积分的最小值，总会导出一条由取得最小值的函数所满足的微分方程。我们会在 Section 4.7 再谈这个想法。

延伸练习

1 **四次函数。**在 $(*)$ 中取 $f(x) = x^2(\pi - x)^2$。证明它只能给出 $\pi^2 \le 12$。为甚么这个测试函数比抛物线差？（把它的形状与 $\sin x$ 比较。）

2 **两个正弦波。**对 $f(x) = \sin x + \sin 2x$ 直接验证 $(*)$，把两边都计算出来。

3 **另一个区间。**用代换证明：若 $g(0) = g(L) = 0$，则 $\displaystyle\int_0^L g^2 \le \frac{L^2}{\pi^2}\int_0^L (g')^2$。这对不同长度的弦说明了甚么？

4 **瑞利法。**较难取 $f(x) = x(\pi - x) + \lambda x^2(\pi - x)^2$，并选取 λ 使 π^2 的界尽可能好。（代数运算相当繁重，用电脑代数系统会有帮助。）

延伸阅读

- **T. W. Körner, *Fourier Analysis***（Cambridge University Press）。一本精彩而旁征博引的书，讲述傅里叶级数及其应用，作者是剑桥的分析学家。
- **Hardy, Littlewood & Pólya, *Inequalities***（Cambridge University Press）。第 7 章讨论 Wirtinger 不等式及相关的不等式。
- **Richard Feynman, *The Feynman Lectures on Physics***，第 II 卷第 19 章（“The principle of least action”，最小作用量原理）。费曼（Feynman）关于求积分最小值的一讲，通篇贯穿物理直觉。可于网上免费阅读。

完整的引导式解答见第 3.7 节：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch03/wirtinger.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com