3.6 斜率的界

工作纸

题目

STEP I 1988，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/88-s1-q7

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有*停一停，试一试*的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　$f'(x)$ 的公式只用到 f 的三个值：在 -1、0 和 1 的值。为甚么三个值就足以确定一个二次函数的导数（derivative）？

阶段 1　公式

涵盖：$f'(x)$ 的公式

> **想一想**　把 $f(1)$、$f(-1)$ 和 $f(0)$ 用 a、b、c 表示，代入后按 x 的幂次整理。

阶段 2 上界

涵盖：$|f'(x)| \le 4$

想一想 对公式取绝对值，并运用三角不等式（triangle inequality），其中 $|f(1)|$，$|f(-1)|, |f(0)| \le 1$。这样得到的 $|f'(x)|$ 的上界（bound）是 x 的甚么函数?

停一停，试一试 按各项的正负号分情况讨论，证明当 $|x| \le 1$ 时，$\left|x+\frac{1}{2}\right| + \left|x-\frac{1}{2}\right| + 2|x| \le 4$。

阶段 3　极端例子

涵盖：等号成立的情况

> **停一停，试一试**　要在 $x = 1$ 处达到这个上界，每一个不等式都必须取等号。f(1)、f(−1) 和 f(0) 必须取甚么值？求出通过这些点的二次函数（quadratic）。

背后的数学

马可夫不等式与切比雪夫多项式

马可夫在 1889 年证明：若 p 是 n 次多项式，且在 $[-1,1]$ 上 $|p(x)| \le 1$，则

$$|p'(x)| \le n^2 \qquad \text{当} |x| \le 1.$$

当 $n = 2$ 时，这就是我们的上界 4。极端情况是*切比雪夫多项式*（Chebyshev polynomials）T_n，其定义为

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta.$$

例如 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ 给出 $T_2(x) = 2x^2 - 1$，即我们的极端二次函数；而 $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ 给出 $T_3(x) = 4x^3 - 3x$。由于 $T_n(x) = \cos n\theta$，这些多项式在 -1 与 1 之间来回振荡的次数，已是 n 次多项式所能做到的最多，而且它们在两端也是最陡的（图 3.6.1）。马可夫的弟弟 Vladimir 在 1892 年把结果推广到高阶导数。

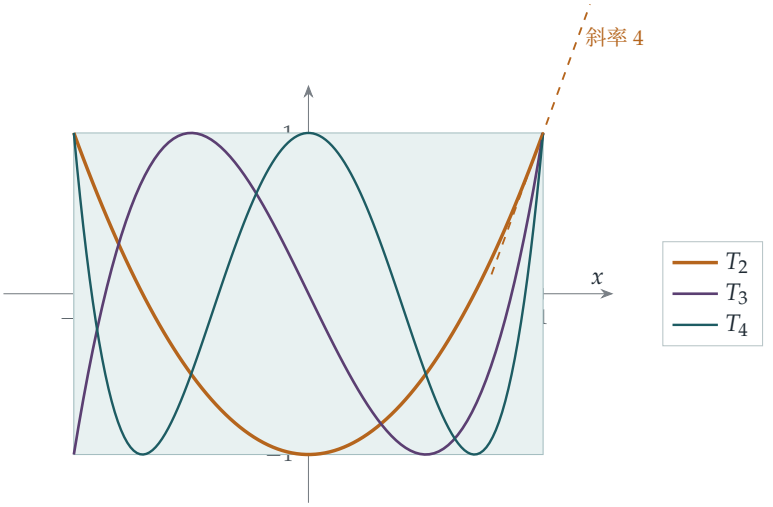

图 3.6.1 切比雪夫多项式 $T_2 = 2x^2 - 1$、$T_3 = 4x^3 - 3x$ 和 $T_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1$ 都留在方框 $|x| \le 1$、$|y| \le 1$ 之内，并且尽可能多次触及方框的顶边和底边。在同次数的多项式中，它们在两端最陡：$T_n'(1) = n^2$。虚线是 T_2 在 $x = 1$ 处的切线，斜率为 4。

插值

题目中的公式是*拉格朗日插值*（Lagrange interpolation）的一个例子：已知函数在若干点的值，写出通过这些点而次数最低的唯一多项式，再用它来逼近该函数或其导数。这里的三个点是 $-1, 0, 1$。这类公式在数值分析（numerical analysis）中无处不在，例如用来从量度所得的数据估计导数。马可夫不等式就是随之而来的警告：函数值的小误差，在导数中最多可以被放大 n^2 倍，这正是门捷列夫当年担心的问题。

切比雪夫多项式的实际应用

切比雪夫多项式是逼近理论（approximation theory）的主力工具。在 T_n 的根处对函数插值，而不是在等距的点上插值，可以把误差控制住；若用等距的点，高次插值在区间两端附近可以错得非常离谱（龙格现象，Runge's phenomenon）。那些把函数计算至机器精度极限、或以极高准确度求解微分方程（differential equation）的软件，内部往往使用切比雪夫展开式。

延伸练习

1 **一般的想法。**证明若 f 是二次函数，则 $\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(-1)\dfrac{x(x-1)}{2} + \mathrm{f}(0)(1-x^2) + \mathrm{f}(1)\dfrac{x(x+1)}{2}$，然后求导，重新得出题目中的公式。

2 **唯一性。**较难证明在 $[-1,1]$ 上满足 $|\mathrm{f}(x)| \le 1$、且在 $[-1,1]$ 内某处有 $|\mathrm{f}'(x)| = 4$ 的二次函数，只有 $\pm(2x^2-1)$。

3 **切比雪夫多项式。**利用 $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ 验证 $T_3(x) = 4x^3 - 3x$，并验证 $T_3'(1) = 9$。证明 $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$，并求 T_4。

4 **T_n 的斜率。**把 $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$ 对 θ 求导，证明 $T_n'(\cos\theta) = \dfrac{n\sin n\theta}{\sin\theta}$，再令 $\theta \to 0$，推导出 $T_n'(1) = n^2$。

延伸阅读

- **Lloyd N. Trefethen,** ***Approximation Theory and Approximation Practice*** （SIAM）。一本出色的现代著作，讲述切比雪夫多项式与插值，能力强的中学生也读得懂，全书穿插电脑实验。
- **Peter Borwein & Tamás Erdélyi,** ***Polynomials and Polynomial Inequalities*** （Springer）。想了解马可夫不等式及其相关结果的来龙去脉，可读此书。程度较深。
- **George M. Phillips,** ***Interpolation and Approximation by Polynomials*** （Springer）。一本大学本科教科书，涵盖拉格朗日插值、切比雪夫多项式和马可夫型不等式。

完整的引导式解答见第 3.6 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch03/markov-bound.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com