3.5 π^e 还是 e^π?

工作纸

题目

STEP II 2013，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/13-s2-q1

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停，试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　取对数（logarithm）后，$a^b = b^a$ 等同于 $b\ln a = a\ln b$。试把这条式重新整理，使 a 只出现在一边，b 只出现在另一边。

阶段 1 过原点的切线（tangent）

涵盖：第 (i) 部分

想一想 若 $y = mx$ 与 $y = \ln x$ 在 $x = x_0$ 处相切，必须满足哪两条方程?

停一停，试一试 若 $y = mx$ 与曲线相交于 $x = a$ 和 $x = b$，试以 m 表示 $\ln a$ 和 $\ln b$。消去 m，然后两边取指数（exponentiate）。

阶段 2　在原点上方与 y 轴相交的直线

涵盖：第 (ii) 部分

停一停，试一试　此时 $\ln p = mp + c$ 且 $\ln q = mq + c$，其中 $c > 0$。以 m 和 c 表示 $\frac{\ln p}{p}$ 和 $\frac{\ln q}{q}$，然后比较两者。

阶段 3　e 右方的弦（chord）

涵盖：第 (iii) 部分

想一想　由 $(p, \ln p)$ 至 $(q, \ln q)$ 的弦（其中 $e \le p < q$）不及曲线在 p 处那么陡峭。为甚么？由此可知这条弦的 y 轴截距（intercept）有何特点?

停一停，试一试　把这个结果连同第 (ii) 部分一并应用于 $p = e$ 和 $q = \pi$。

阶段 4　与切线平行的弦

涵盖：第 (iv) 部分

> **停一停，试一试**　这条弦与切线 $y = \frac{x}{e}$ 平行，而曲线位于该切线下方。这条弦与 y 轴相交于原点上方还是下方？然后把 c 的正负号倒转，重做第 (ii) 部分。

背后的数学

$\frac{\ln x}{x}$ 的图像

本题的一切，都可以在 $h(x) = \frac{\ln x}{x}$ 的图像中看到（图 3.5.1）。它的导数（derivative）是 $h'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$，所以 h 在 $(0, e)$ 上递增，在 $x = e$ 处达到最大值（maximum）$\frac{1}{e}$，然后递减并趋向 0。一条高度为 m 的水平线，若高度介乎 0 与 $\frac{1}{e}$ 之间，便会与图像相交两次，交点为 $a < e < b$，且 $h(a) = h(b)$，这正正就是 $a^b = b^a$。在 e 的右方，h 递减，所以当 $e \le p < q$ 时，我们有 $h(p) > h(q)$，即 $p^q > q^p$。特别地，$e^\pi > \pi^e$；更一般而言，对每个 $x \neq e$ 都有 $e^x > x^e$：在这场较量中，没有其他数能胜过 e。

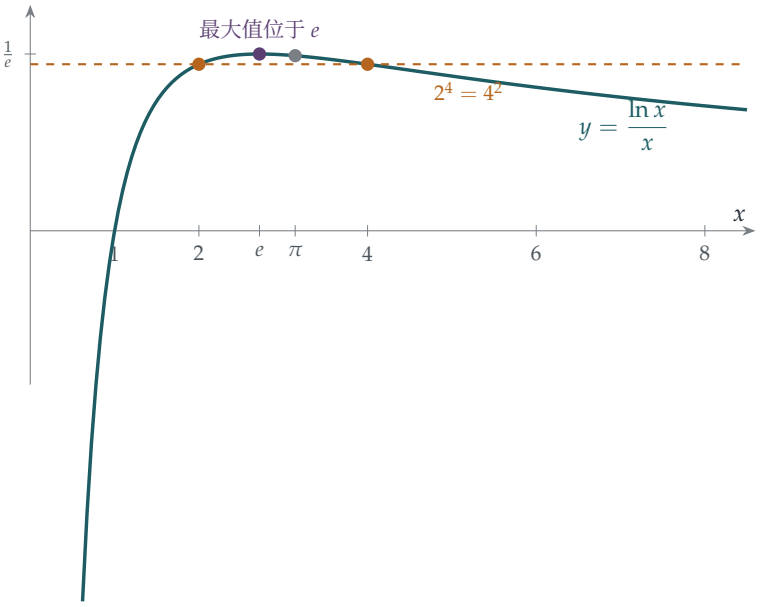

图 3.5.1 $h(x) = \frac{\ln x}{x}$ 的图像。它上升至 $x = e$ 处的最大值 $\frac{1}{e}$，然后下降。因为 $h(e) > h(\pi)$，所以 $e^\pi > \pi^e$。高度为 $\frac{\ln 2}{2}$ 的水平线（琥珀色）与图像相交于 $x = 2$ 和 $x = 4$：这是唯一一对满足 $n^m = m^n$ 的相异整数。

$x^y = y^x$ 的所有解

哪些相异的正实数对满足 $x^y = y^x$? 有一个巧妙的方法可以把它们全部找出来。设 $y = tx$，其中 $t > 1$；那么 $x^{tx} = (tx)^x$ 给出 $x^t = tx$，所以 $x^{t-1} = t$，并且

$$x = t^{1/(t-1)}, \qquad y = t^{t/(t-1)}.$$

写成 $t = 1 + \frac{1}{n}$，便得 $x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 及 $y = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$。取 $n = 1$ 时，这就是 $(2, 4)$；取 $n = 2$ 时则是 $\left(\frac{9}{4}, \frac{27}{8}\right)$，而的确有 $\left(\frac{9}{4}\right)^{27/8} = \left(\frac{27}{8}\right)^{9/4}$。当 $n \to \infty$ 时，两者都趋向 e，也就是两个分支会合之处。1728 年，丹尼尔·伯努利（Daniel Bernoulli）与哥德巴赫（Christian Goldbach）曾在书信中讨论这个问题，其后欧拉（Euler）亦有研究。

最经济的底

函数 $x^{1/x} = e^{h(x)}$ 同样在 $x = e$ 处取得最大值。这解答了一个有趣的问题：假如一个记数系统的“成本”是它的底（base）乘以所需的数位数目，那么最经济的底就是 e；若只考虑整数，则是 3（仅仅胜过 2）。有少数实验性质的电脑采用过以 3 为底的记数法，例如 1958 年苏联的 Setun。

延伸练习

1 **整数。**试做 STEP I 1988，第 1 题（step.maths.org/questions/88-s1-q1）。

2 **更多比较。**试做 STEP II 2025，第 3 题（载于 OCR 提供下载的 2025 年试卷，www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip）。该题利用本节的图像，解决更多 a^b 与 b^a 之间的比较，其中一个要靠 e 的数值界限才能完成。

3 **一行证明。**利用当 $x \neq 0$ 时 $e^x > 1 + x$，并取 $x = \frac{\pi}{e} - 1$，直接证明 $e^\pi > \pi^e$。

延伸阅读

- **Eli Maor, *e: The Story of a Number***（Princeton University Press）。讲述 e 的历史，包括方程 $x^y = y^x$。
- **Paul Nahin, *An Imaginary Tale***（Princeton University Press）。不只谈 $\sqrt{-1}$：书中满载正是这一类的有趣计算。
- **Michael Spivak, *Calculus***（Cambridge University Press）。第 11 章以完全严谨的方式，讲解如何运用导数了解图像的形状。

完整的引导式解答见第 3.5 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch03/pi-e-or-e-pi.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com