3.4 以面积证明不等式

工作纸

题目

STEP III 2011，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/11-s3-q4

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停”或“试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　$\int_0^a \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$ 是曲线与 x 轴之间的面积。在同一幅图上，$\int_0^b \mathrm{f}^{-1}(y)\,\mathrm{d}y$ 代表哪一块面积？

阶段 1 图像

涵盖：第 (i) 部分

想一想 $\int_0^a \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$ 是曲线与 x 轴之间的面积。在同一幅图上，$\int_0^b \mathrm{f}^{-1}(y)\,\mathrm{d}y$ 代表哪一块面积？

停一停，试一试 画出以 $(0,0)$ 和 (a,b) 为顶点的长方形，并把两个区域都涂上阴影。它们是否盖满整个长方形？甚么时候没有多出来的部分？

阶段 2　杨氏不等式（Young's inequality）

涵盖：第 (ii) 部分

想一想　取 $\mathrm{f}(x) = x^{p-1}$，$\mathrm{f}^{-1}(y)$ 是甚么？把两个积分都计算出来。

停一停，试一试　利用 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 化简第二个积分。至于等号何时成立，可利用你在第 (i) 部分的答案。

阶段 3 **反正弦**

涵盖：第 (iii) 部分

想一想 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上取 $\mathrm{f}(x) = \sin x$。$\arcsin y$ 该怎样积分？试把它看成 $\arcsin y \times 1$，用分部积分法（integration by parts）。

停一停，试一试 要推导出关于 $\arcsin(t^{-1})$ 的不等式，选取最简单的 a 值，并设 $b = \frac{1}{t}$。

背后的数学

从杨氏到赫尔德

杨（William Henry Young）在 1912 年发表他的不等式。它之所以重要，在于它所引出的结果。假设 $\sum a_i^p = 1$ 及 $\sum b_i^q = 1$。对每一对数应用杨氏不等式，然后相加，

$$\sum a_i b_i \le \frac{\sum a_i^p}{p} + \frac{\sum b_i^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

把各个 a 和各个 b 按比例缩放，使两个和都等于 1，就得到**赫尔德不等式**：对正数，

$$\sum a_i b_i \le \Big(\sum a_i^{p}\Big)^{1/p}\Big(\sum b_i^{q}\Big)^{1/q}.$$

取 $p=q=2$，这就是**柯西—施瓦兹不等式** $\sum a_i b_i \le \sqrt{\sum a_i^2}\sqrt{\sum b_i^2}$，它说的是两个向量夹角的余弦最多为 1。赫尔德不等式是 L^p 空间理论的基础；在这些函数空间里，“距离”是用 $\left(\int |f|^p\right)^{1/p}$ 来量度的，你会在泛函分析（functional analysis）和概率的课程中遇到它们。

勒让德变换

图 3.4.1（见网上该节的完整版）对 f 和 f^{-1} 的处理完全对称。记 $F(a)=\int_0^a \mathrm{f}$ 及 $G(b)=\int_0^b \mathrm{f}^{-1}$。不等式说的是 $F(a)+G(b)\ge ab$，在曲线上等号成立，所以

$$G(b)=\max_a\,(ab-F(a)).$$

这个把凸函数（convex function）F 变成另一个凸函数 G 的运算，就是**勒让德变换**，而连续做两次就会回到 F。在力学中，它把**拉格朗日量**（Lagrangian，位置与速度的函数）转换成**哈密顿量**（Hamiltonian，位置与动量的函数）：这是牛顿（Newton）定律的两种等价表述，你会在大学二年级的课程中学到。在热力学中，它在能量、焓（enthalpy）和自由能（free energy）之间互相转换。对 $F(a)=a^p/p$，变换的结果是 $G(b)=b^q/q$，这就是杨氏不等式中两个指数由 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 联系起来的原因。

延伸练习

1 **1987 年的版本。**试做 STEP I 1987，第 6 题（step.maths.org/questions/87-s1-q6）。它用同一类图来求反函数的积分。用求导来验算你的答案。

2 **柯西–施瓦兹。**用 $p=q=2$ 的杨氏不等式，证明对正数有 $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \le \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\,\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}$。（提示：先处理两个平方根都等于 1 的情况。）

3 **指数版本。**在 $(*)$ 中取 $\mathrm{f}(x)=e^x-1$，证明对 $a,b\ge 0$，

$$ab \le e^a-1-a+(1+b)\ln(1+b)-b.$$

等号何时成立？

4 **这个界有多好？** 较难 用计算机比较 $t=1,2,10$ 时的 $\arcsin(1/t)$ 与 $t-\sqrt{t^2-1}$。证明当 t 很大时，$t-\sqrt{t^2-1}\approx\frac{1}{2t}$，而 $\arcsin(1/t)\approx\frac{1}{t}$。为甚么这个界相差了一个因子 2？（看看 $a=0$ 时的图：多出来的部分有多少被浪费了？）

延伸阅读

- **J. Michael Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class***（Cambridge University Press）。第 1 章和第 9 章讲述柯西–施瓦兹不等式和赫尔德不等式，途中也谈到杨氏不等式。
- **Roger Nelsen, *Proofs Without Words***（Mathematical Association of America）。收录了杨氏不等式和许多其他的图形证明。
- **V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics***（Springer）。第 14 节正是用这幅图来解释勒让德变换。内容较深，但相关的一节很短。

完整的引导式解答见第 3.4 节：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch03/areas-inequalities.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com