3.3 凸性的威力

工作纸

题目

STEP II 2007，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/07-s2-q7

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停”或“试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　画一条向下弯的曲线，例如 $(0, \pi)$ 上的 $y = \sin x$。在曲线上标出两点，并用直线把它们连起来。这条弦在曲线之上还是之下？

阶段 1　检验凹性（concavity）

涵盖：第一部分

> **想一想**　求 $\sin x$ 和 $\ln x$ 的二阶导数（second derivative）。它们在所给区间上的正负号是甚么？

阶段 2 三角形

涵盖：第 (i) 部分

> **停一停，试一试** 对 $\mathrm{f}(x) = \sin x$ 和三个角 A、B、C 使用延森不等式（Jensen's inequality）。这三个角是否位于 sin 为凹函数（concave function）的区间之内？它们的平均值是多少？

阶段 3 一行证明算术几何平均不等式（AM–GM）

涵盖：第 (ii) 部分

> **停一停，试一试** AM–GM 不等式比较的是积与和。哪一个凹函数能把积化为和？对它使用延森不等式。

阶段 4　运用 AM–GM 不等式

涵盖：第 (ii) 部分

想一想　第一个不等式：左方有四项，右方是三个变量的积。对四个数使用 AM–GM 不等式。为甚么 16 会有帮助？

停一停，试一试　求最小值：你想得到 $x^5y^5z^5$ 的五次方根，所以要用五个数。另外两个数应该是甚么？等号何时成立？

背后的数学

凸函数

在大学里，凸函数（convex function，即把凹函数上下倒转）的标准定义完全不涉及导数：若

$$\mathrm{f}(tx_1 + (1-t)x_2) \le t\,\mathrm{f}(x_1) + (1-t)\,\mathrm{f}(x_2) \qquad \text{对所有} x_1, x_2 \text{及} 0 \le t \le 1,$$

则称 f 为凸函数，这正正是说弦位于曲线之上。这个定义对不可微（not differentiable）的函数（例如 $|x|$）以及多元函数同样适用。丹麦工程师兼数学家琴生（Johan Jensen）

在 1906 年提出了以他命名的不等式，使凸函数成为一门独立的学问。

无处不在的凸性

凸性在数学及其应用中随处可见。

- **概率。**琴生不等式指出，对于凹函数 f 和任意随机变量（random variable）X，有 $\mathrm{E}[\mathrm{f}(X)] \leq \mathrm{f}(\mathrm{E}[X])$。在经济学中，若以 f 为一个凹的“效用”（utility）函数，这就解释了为何人们宁愿稳拿 £100，也不愿参与一场各有一半机会得到 £0 或 £200 的赌局，亦解释了为何会有保险。
- **信息论。**均匀分布（uniform distribution）使熵（entropy）达到最大，这个结果是数据压缩的基础，而它的证明就是 ln 的琴生不等式。
- **优化。**凸函数除了全局最小值之外，再没有其他局部极小值（local minima），所以“一直往下坡走”总能找到最佳答案。这就是凸优化问题能够有效率地求解的原因，也是人们花那么多工夫把问题改写成凸形式的原因。

在 Section 3.4 中，我们会看到凸性的另一面：函数与其反函数（inverse）之间的一种几何对偶（duality）。

延伸练习

1 **定义。**STEP II 2018，第 2 题（step.maths.org/questions/18-s2-q2）的第 (i) 及 (ii) 部分由上面方框中以弦刻划凹性的定义出发，逐步建立三个点的琴生不等式。

2 **正弦之积。**试做 STEP II 2018，第 2 题（step.maths.org/questions/18-s2-q2）的第 (iii) 部分。

3 **锐角三角形。**证明 $\tan x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上是凸的，并由此推出在锐角三角形（acute-angled triangle）中，$\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3}$。

4 **幂平均。**证明 x^2 是凸的，并由此推出 $\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)^2 \leq \frac{a_1^2+\cdots+a_n^2}{n}$。试把这个结果诠释为关于一组数的方差（variance）的命题。

延伸阅读

- **J. Michael Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class***（Cambridge University Press）。第 6 章讲述凸性和琴生不等式。
- **Claudi Alsina & Roger Nelsen, *When Less Is More: Visualizing Basic Inequalities***（Math-

ematical Association of America）。以图形证明不等式，当中不少用到凸性。

- **Stephen Boyd & Lieven Vandenberghe, *Convex Optimization***（Cambridge University Press）。一部现代经典，可在网上免费阅读；开首几章说明凸性在实际应用中为何重要。

完整的引导式解答见第 3.3 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch03/convexity.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com