3.2 倒过来的 AM–GM

工作纸

题目

STEP II 1993，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s2-q8

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停，试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> ? **想一想**　为甚么由 2^m 个数走到 2^{m+1} 个数，可能比由 n 走到 $n+1$ 容易？

阶段 1　两个数

涵盖：两个数的情形

> ? **想一想**　展开 $\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 - a_1 a_2$，并把它写成一个平方。

阶段 2 倍增

涵盖：对 m 使用归纳法（induction）

想一想 把这 2^{m+1} 个数分成前半和后半两组。设 P 和 Q 分别为两组的算术平均（arithmetic mean）。归纳假设（inductive hypothesis）对每一组说明了甚么？

停一停，试一试 把两个结果相乘，然后对 P 和 Q 使用两个数的情形。$\frac{P+Q}{2}$ 是甚么？

阶段 3　填补空隙

涵盖：任意项数

想一想　网上试题库收录的这份试卷有一处误植：$b_1 = a_2$ 应为 $b_1 = a_1$。补齐后的数列 $b_1, \dots, b_{2^m}$ 的平均值是甚么？

停一停，试一试　对各个 b 应用 $(*)$，然后把两边同除以 A 的适当幂次，再取 n 次方根。

背后的数学

柯西的归纳法

柯西在他的《*Cours d'analyse*》(1821) 中发表了这个证明；我们在第 2 章谈过，正是这本书开创了分析学的严格处理。这种技巧现在称为*向前—向后归纳法*（forward–backward induction）：先对无穷多个情形组成的一个序列（这里是 2 的幂）证明命题成立，然后证明 n 的情形蕴含 $n-1$ 的情形。两者合起来，就能到达每一个 n。我们的第 3 阶段是由 2^m 直接跳到 n，但你也可以一步一步来：在 $n-1$ 个数之后补上一个它们的平均数，就能证明 n 的情形蕴含 $n-1$ 的情形。

一条不等式，多种证明

AM–GM 有数十种证明，把它们互相比较，是认识不同数学风格的好方法。

- **利用凸性（convexity）。**对数（logarithm）函数是凹（concave）函数，所以对数的平均不大于平均的对数。取指数之后，这就是 AM–GM；这也是 Section 3.3 的主题。
- **波利亚(George Pólya)的证明。**利用 $e^{x-1} \geq x$(e^{x-1} 在 $x = 1$ 处的切线位于曲线下方)。设 A 为平均数，把这条不等式应用于每一个 a_i/A，然后相乘：$\prod \frac{a_i}{A} \leq e^{\sum(a_i/A-1)} = e^0 = 1$。波利亚说这个证明是他在梦中想到的。
- **利用磨光法（smoothing）。**如果其中两个数不相等，就把它们都换成两者的平均数。算术平均不变，而由两个数的情形可知，乘积会增大。重复这个步骤，所有数就会被推向平均数。

不用微积分的最优化

AM–GM 能把许多最优化问题变成一行就能解决的问题。在表面积固定的所有长方体盒子当中，哪一个体积最大？在周界固定的所有长方形当中，哪一个面积最大？（是正方形，由两个数的情形可知：$xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$，等号当 $x = y$ 时成立。）等号成立的条件告诉你最优值在哪里出现，而不等式则告诉你那确实是最优值，而不仅仅是一个驻点（stationary point）。可与 Section 3.1 中的告诫比较。

延伸练习

1. **后退一步。**补上一个平均数的副本，直接证明：若 AM–GM 对 n 个数成立，则它对 $n-1$ 个数也成立。
2. **一个递增数列。**把 AM–GM 应用于 $1+\frac{1}{n}, \ldots, 1+\frac{1}{n}, 1$ 这 $n+1$ 个数（其中 $1+\frac{1}{n}$ 有 n 个），证明 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$。
3. **最好的盒子。**一个密封的长方体盒子的表面积为 S。把 AM–GM 用于三个不同的面的面积，证明其体积不大于 $(S/6)^{3/2}$，等号在盒子为正方体时成立。
4. **调和平均（harmonic mean）。**把 AM–GM 应用于 $1/a_i$ 这些数，证明调和平均 $\dfrac{n}{1/a_1 + \cdots + 1/a_n}$ 不大于几何平均。

延伸阅读

- **J. Michael Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class*** (Cambridge University Press)。一本以问题带动、讲不等式的出色著作，正好由这个程度起步。第 2 章讲的就是 AM–GM。

- **Hardy, Littlewood & Pólya, *Inequalities***（Cambridge University Press）。经典参考书，由二十世纪三位伟大的分析学家撰写。
- **Arthur Engel, *Problem-Solving Strategies***（Springer）。第 7 章收录了大量来自数学奥林匹克的不等式题目。

完整的引导式解答见第 3.2 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch03/am-gm-backwards.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com