3.1 找出错处

工作纸

题目

STEP I 1991，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/91-s1-q6

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停”或“试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　当题目要求你“评论每一步”时，你在每一步应该检查甚么？动笔之前先列一张清单。

阶段 1 导数求对了吗?

涵盖：第 (i) 部分

想一想 自己用商式法则(quotient rule)对 g 求导,并把分子因式分解(factorise)。$g'(x) = 0$ 在哪里成立?

停一停，试一试 把 $x = 1$ 和 $x = -1$ 直接代入你已因式分解的 $g'(x)$ 检查一下。它们是驻点（stationary point）吗?

阶段 2　函数值算对了吗?

涵盖：第 (i) 部分

? **想一想**　自己算出 $g(0)$、$g(1)$ 和 $g(-1)$。它们与论证中的数值一致吗?

阶段 3 比较函数值能告诉你哪一个是极大值吗？

涵盖：第 (i) 部分

想一想 假设某函数恰好有两个驻点，其函数值分别为 $\frac{3}{4}$ 和 1。前者是否必定是极小值（minimum），后者是否必定是极大值（maximum）？

停一停，试一试 根据 $g'(x)$ 在 0 两侧的正负号，判断 $x = 0$ 处驻点的性质。

阶段 4　驻点的函数值能界定函数的范围吗？

涵盖：第 (i) 部分

停一停，试一试　那么结论本身是否仍然成立？当 $x \to \pm\infty$ 时，$\mathrm{g}(x)$ 会怎样？$\mathrm{g}(x)$ 何时为负？试找出一个使 $\mathrm{g}(x) < \frac{3}{4}$ 的 x。

阶段 5 **积分**

涵盖：第 (ii) 部分

想一想 对 $-3(1-x)^{-4}$ 求导。你得到 $(1-x)^{-3}$ 吗?

想一想 用上正确的原函数（antiderivative）后，答案仍然是 0。那么，结论终究是对的吗?

停一停，试一试 微积分基本定理（fundamental theorem of calculus）要求被积函数（integrand）在整个区间上连续（continuous）。$(1-x)^{-3}$ 在 $[-1,3]$ 上连续吗？在那个出问题的点附近，积分会怎样?

背后的数学

大数学家也会出错

分析学的奠基者也犯过一模一样的错误。柯西（Augustin-Louis Cauchy）在 1821 年的 *Cours d'analyse* 中“证明”了连续函数的收敛（convergent）和必定连续。1826 年，阿贝尔（Niels Henrik Abel）指出了一个反例（counterexample）：傅里叶级数（Fourier series）

$$\sin x - \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x - \cdots$$

对每一个 x 都收敛，而且每一项都连续，但它的和在 $x = \pm\pi$ 处出现跳跃（当 $-\pi < x < \pi$ 时，它等于 $x/2$）。要弄清楚柯西的论证究竟错在哪里，花了数十年时间，并由此产生了一致收敛（uniform convergence）的概念，如今每个修读分析的学生都要学。隐藏的假设，尤其是关于交换两个极限次序的假设，是整个分析学中最常见的错误来源。

带有前提的定理

这一题中有两个错误，都源于忽视了定理的前提（hypotheses）。

- 极值定理（extreme value theorem）指出，在有界闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数必定取得最大值和最小值。要找出它们，须检查端点、驻点，以及函数不可导的点：$|x|$ 在 $[-1, 1]$ 上的最小值在 0 处取得，而这一点既非端点，亦非驻点。如果 f 在区间内部处处可导，则位于内部的最大点或最小点必定是驻点。在整条实数线上，没有端点可供检查，函数甚至可能根本没有最大值；你必须改为考察 $x \to \pm\infty$ 时的表现。
- 微积分基本定理要求被积函数在 $[a, b]$ 上连续。如果不连续，积分可能仍然存在（试试 $\int_0^1 x^{-1/2}\,\mathrm{d}x$），也可能不存在（如本题），你必须用极限来检查。

在大学里，你遇到的每一条定理都附有一张精确的前提清单。训练的一部分，就是每次使用定理之前，都要把这些前提检查一遍。

发散积分的一个值

第 (ii) 部分还有一个耐人寻味的注脚。区间 $[-1, 3]$ 关于出问题的点 $x = 1$ 对称，而 $(1 - x)^{-3}$ 关于该点是“奇”的。如果你挖去一个对称的缺口 $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$，再令 $\varepsilon \to 0$，两块无穷大的部分便会互相抵消，你确实会得到 0。这称为柯西主值（Cauchy principal value），在物理学和复分析中确实很有用。但它是一个刻意选取的不同定义，一个误打误撞得出这个值的论证，甚么也没有证明。

延伸练习

1 **会说谎的代换。**试做 STEP I 1987，第 8 题（step.maths.org/questions/87-s1-q8）。一个代换（substitution）似乎显示某个正的积分等于一个负的积分。准确找出论证在哪里出错，然后正确地计算两个积分。

2 **是对还是错？**试做 STEP I 1998，第 3 题（step.maths.org/questions/98-s1-q3）：有四个断言要你证明或否证。对每一个断言，动笔之前先判断你预期是哪一种。

3 **所有马都是同一种颜色。**找出以下用归纳法（induction）写成的“证明”的漏洞：任何一匹马都与自己颜色相同；给定 $n+1$ 匹马，由归纳假设，前 n 匹颜色相同，后 n 匹也是；两组有重叠，所以全部 $n+1$ 匹颜色相同。

4 **一个确实存在的积分。**证明 $\int_{-1}^{1} |x|^{-1/2}\,\mathrm{d}x$ 存在，尽管被积函数在 0 处没有定义，并求出它的值。

延伸阅读

- **E. A. Maxwell, *Fallacies in Mathematics***（Cambridge University Press）。一本经典的谬误论证集，收录各种似是而非的错误论证，按课题编排，为高中第六学级（sixth form）学生而写。
- **Bernard Gelbaum & John Olmsted, *Counterexamples in Analysis***（Dover）。数以百计的例子，说明定理的前提为何重要。开始修读分析课程之后，不妨随手翻阅。
- **Imre Lakatos, *Proofs and Refutations***（Cambridge University Press）。一篇精彩的对话，探讨数学家如何发现并修正证明中的错误。

完整的引导式解答见第 3.1 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch03/spot-the-flaw.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com