# 2.9 逐步逼近 e 的分数

**工作纸**

**题目**

**STEP II 2021，第 8 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2021 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

## 提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停”或“试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　$t(1-t)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值是多少？由此可知，当 $n$ 增大时 $T_n$ 的大小会怎样变化？

### 阶段 1 求导两次

涵盖：第 (i) 部分

**想一想** 设 $p(t) = t^n(1-t)^n = [t(1-t)]^n$。先求导（differentiate）一次，并利用 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[t(1-t)] = 1-2t$。

**停一停，试一试** 再求导一次，然后抽出公因式（common factor）$n\,t^{n-2}(1-t)^{n-2}$。为了配合题目要求的形式，把 $(1-2t)^2$ 用 $t(1-t)$ 表示。

### 阶段 2　分部积分两次

涵盖：第 (ii) 部分

**想一想**　$p(t)$ 在 $t=0$ 和 $t=1$ 时都等于零。那么当 $n \geq 2$ 时，$p'(t)$ 又如何？用分部积分法（integration by parts）计算 $p(t)\,e^{t}$ 的积分时，这一点为甚么重要？

**停一停，试一试**　分部积分两次，使 $p''$ 出现。利用第 (i) 部分的结果，除以 $n!$，再认出那两个积分。

### 阶段 3 整数结构

涵盖：第 (iii) 部分

**想一想** 用分部积分法直接求出 $T_0$ 和 $T_1$。

**停一停，试一试** 两者都是 $a + b\,e$ 的形式，其中 $a$ 和 $b$ 是整数（integer）。为甚么第 (ii) 部分的递推关系（recurrence）会保持这个形式？

### 阶段 4　数值很小，因而大有启示

涵盖：第 (iv) 部分

> **想一想**　当 $0 < t < 1$ 时，为 $t^n(1-t)^n$ 和 $e^t$ 定出界限（bound）。由此可得出 $T_n$ 的甚么结论？

> **停一停，试一试**　把 $0 < a_n + b_n e < \frac{e}{n!}$ 除以 $|b_n|$。这说明 $e$ 与 $-a_n/b_n$ 之间的距离有甚么特点？

## 背后的数学

#### $e$ 是无理数的另一个证明

这道题离一个著名定理只差一步。假设 $e = p/q$，其中 $p, q$ 是正整数。那么

$$q\,T_n = q a_n + b_n p$$

是一个整数。但是 $0 < q\,T_n < \dfrac{qe}{n!}$，而当 $n$ 很大时，右边小于 1。于是 $qT_n$ 就会是一个严格介乎 0 与 1 之间的整数，这是不可能的。因此 $e$ 是无理数。这正是 Section 1.4 中“把一个整数困在 0 与 1 之间”的想法，只是这次由积分而不是级数来实现。正是这一类积

分，配合 $t^n(1-t)^n$ 这样的多项式，在 1873 年被夏尔·埃尔米特（Charles Hermite）用来证明 $e$ 是*超越数*：它不是任何整系数多项式的根。

### 连分数

表中的分数不仅是好；它们更属于最佳之列。$e$ 的连分数（continued fraction）由欧拉（Euler）发现，有一个优美的规律：

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \ldots],$$

而它的渐近分数（convergents）是 $2, 3, \frac{8}{3}, \frac{11}{4}, \frac{19}{7}, \frac{87}{32}, \frac{106}{39}, \frac{193}{71}, \ldots, \frac{2721}{1001}, \ldots$。我们的 $-a_n/b_n$ 恰好是每隔两个取一个的渐近分数。没有任何分母更小的分数能更接近 $e$。欧拉发现的这个规律本身就是 $e$ 是无理数的第一个证明，因为只有有理数才有有限的连分数。

### 阿佩里的奇迹

1978 年，罗杰·阿佩里（Roger Apéry）宣布证明了 $\zeta(3) = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \cdots$ 是无理数，这是自欧拉以来一直悬而未决的问题（见 Section 2.3）。他的证明实在太出人意表，以致在场听众起初并不相信。一年后，Frits Beukers 找到一个简短的版本，所用的积分形如

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{-\ln(xy)}{1-xy}\, P_n(x) P_n(y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

其中 $P_n$ 由 $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^n(1-x)^n\right)$ 构造而成。这些积分很小，是正数，并且形如“整数 + 整数 $\times\, \zeta(3)$”再除以一个受控的分母：这正是本题的策略。至于 $\zeta(5)$ 或 $e + \pi$ 是否无理数，至今仍然未知。

## 延伸练习

1. **运行递推关系。**由递推关系计算 $n = 2, 3, 4$ 时的 $a_n$ 和 $b_n$，并核对表中的分数。证明 $b_n$ 的正负号交替出现。

2. **更精确的上界。**证明 $0 < T_n < \dfrac{e}{4^n\, n!}$。这把 $-a_n/b_n$ 的误差估计改进了多少？

3. **无理性的证明。**把上面方框中的论证仔细写出来。你究竟在哪一处用到 $T_n > 0$？

4. **换一个权函数。**较难把 $e^t$ 换成 $e^{2t}$，重做这道题（即 $U_n = \int_0^1 \frac{t^n(1-t)^n}{n!} e^{2t}\, \mathrm{d}t$）。求 $U_n$ 的递推关系，证明 $U_n$ 是 1 和 $e^2$ 的有理系数组合，并探究这个论证是否仍能证明 $e^2$ 是无理数。（与 Section 1.4 比较。）

## 延伸阅读

- **Ivan Niven, *Irrational Numbers***（Mathematical Association of America）。关于无理性证明的经典小书，当中包括埃尔米特的方法。
- **Alfred van der Poorten, “A proof that Euler missed”**, *The Mathematical Intelligencer* 1 (1979)。生动地记述阿佩里的证明及其所得到的回响。
- **Julian Havil, *The Irrationals***（Princeton University Press）。一部无理数的历史，为一般数学读者而写。

完整的引导式解答见第 2.9 节：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch02/e-approximations.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com