2.8 平方再减二

工作纸

题目

STEP III 2021，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2021 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停”或“试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　为甚么 $[-2,2]$ 内的数永远无法逃出去？当 $-2 \le x \le 2$ 时，$x^2 - 2$ 最大和最小可以是多少？

阶段 1 逃逸

涵盖：第 (i) 部分

想一想 4^{n-1} 这个因子提示：每走一步，与 2 的距离至少变为原来的四倍。设 $x_n = 2 + d$：以 d 表示，x_{n+1} 是甚么？

停一停，试一试 把这个结果用于对 n 的归纳法（induction）。先验证 $n = 1$ 的情况。

阶段 2　逃逸当且仅当 $|a| > 2$

涵盖：第 (ii) 部分

想一想　“当且仅当”（if and only if）表示要分开作两个证明。第 (i) 部分几乎已给出其中一个方向。当 $a < -2$ 时，还需要补上甚么？

停一停，试一试　至于另一个方向：若 $-2 \le x \le 2$，$x^2 - 2$ 最大可以是多少，最小又可以是多少？

阶段 3 隐藏的公式

涵盖：第 (iii) 部分

想一想 若 $a > 2$，则存在一个数 $t > 1$ 使得 $a = t + \frac{1}{t}$。为甚么?

停一停，试一试 以 t 表示，求出 x_2 和 x_3。x_n 有甚么规律?

阶段 4　乘积裂项相消（telescope）

涵盖：第 (iii) 部分

想一想　$\left(t-\frac{1}{t}\right)\left(t+\frac{1}{t}\right)$ 等于甚么？把结果再乘以 $t^2+\frac{1}{t^2}$。$\left(t-\frac{1}{t}\right)x_1x_2\cdots x_n$ 会变成甚么？

停一停，试一试　以 t 表示，计算 x_{n+1}^2-4，并与上述乘积比较。A 取甚么值时，y_n 的两个表达式才会一致？以 A 表示，a 又是甚么？

阶段 5 y_n **是否收敛（converge）？**

涵盖：第 (iii) 部分

> **想一想** 取这个 a 值，把 y_n 单以 x_{n+1} 表示。第 (ii) 部分告诉你 x_{n+1} 有甚么性质？

背后的数学

秩序与混沌

在 $[-2,2]$ 之内会发生甚么事？在那里 $a = t + 1/t$ 行不通（它需要 $|a| \geq 2$），但三角函数的版本却可行：设 $a = 2\cos\theta$。则 $x_2 = 4\cos^2\theta - 2 = 2\cos 2\theta$，而一般地

$$x_n = 2\cos(2^{n-1}\theta).$$

所以在区间之内，这个映射只不过是*把角度加倍*。听起来无伤大雅，但把角度加倍其实是混沌的。把 θ/π 写成二进制（binary）：加倍会把二进制小数点向右移一位，并丢掉最前面的一位数字。经过 50 步之后，x_n 取决于 θ/π 的第 51 位二进制数字，所以初始值若有 10^{-15} 的误差（一般电脑的精确度），50 步之后的答案就完全不可靠。这种对初始条件的敏感依赖（sensitive dependence on initial conditions）正是混沌的标志，见图 2.8.1。映射 $x \mapsto x^2 - 2$ 经变量代换后，等价于著名的逻辑斯谛映射（logistic map）$x \mapsto 4x(1-x)$，我们会在 Section 8.7 再遇上它。

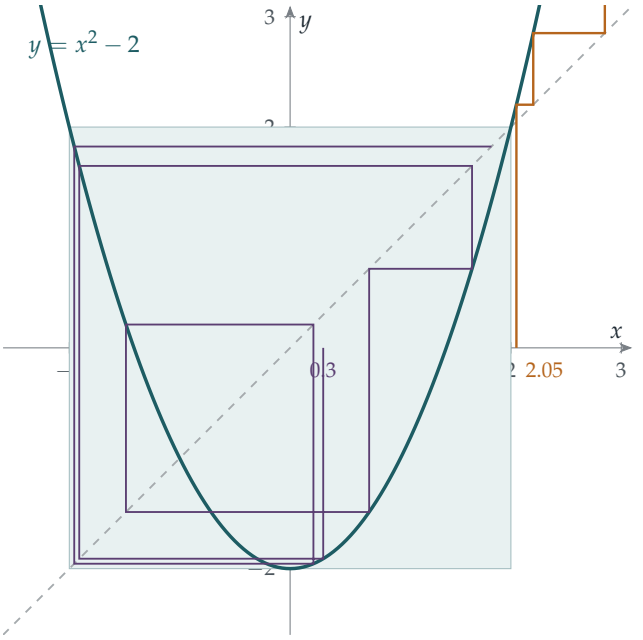

图 2.8.1　$x_{n+1} = x_n^2 - 2$ 的蛛网图（cobweb diagram）。由 0.3 出发（紫红色），轨道（orbit）永远留在阴影正方形 $[-2,2]^2$ 之内，混沌地游走。由区间外不远处的 2.05 出发（琥珀色），它就会逃逸：$2.05, 2.20, 2.85, 6.13, \ldots$

寻找最大的质数

梅森数是指 $M_p = 2^p - 1$。卢卡斯（Édouard Lucas）在 1876 年发现了一个出色的检验法，用来判断 M_p 是否质数（其中 p 为奇质数），其后莱默（Derrick Lehmer）在 1930 年把它完善：由 $s_0 = 4$ 开始，反复平方后减 2，每次都取模（modulo）M_p 化简。则

$$M_p \text{ 是质数} \iff s_{p-2} \equiv 0 \pmod{M_p}.$$

以 $M_7 = 127$ 为例：$s = 4, 14, 194 \equiv 67, 67^2 - 2 \equiv 42, 42^2 - 2 \equiv 111, 111^2 - 2 \equiv 0$，所以 127 是质数。它与本题的联系就在于那个代换：$4 = t + 1/t$，其中 $t = 2 + \sqrt{3}$，所以 $s_k = (2+\sqrt{3})^{2^k} + (2-\sqrt{3})^{2^k}$，而检验法的证明用到形如 $a + b\sqrt{3}$ 的数的算术，与 Section 1.6 的高斯整数（Gaussian integers）颇为相似。由于每一步只需要一次平方，这个检验法极为快速，这就是为甚么已知最大的质数中的大部分，包括现时的纪录保持者，都是梅森质数（并非全部都是：其他特殊形式，例如 $a^{2^n} + 1$，也有各自的快速检验法）。在本书撰写之时，纪录是 $2^{136279841} - 1$，这个数有多于 41 百万位数字，于 2024 年发现。

曼德博集合

把 -2 换成任意常数 c，并容许复数：$z \mapsto z^2 + c$。令 0 的轨道保持有界的所有 c 所组成的集合，就是曼德博集合（Mandelbrot set）。我们的映射对应 $c = -2$，即曼德博集合最

左边的一点，而轨道保持有界的初始值所组成的集合（它的茹利亚集合（Julia set））正好是我们在第 (ii) 部分找到的区间 $[-2,2]$。对于几乎所有其他的 c，这个集合都是分形（fractal）。

延伸练习

1 **区间之内。**证明若 $a = 2\cos\theta$，则 $x_n = 2\cos(2^{n-1}\theta)$。求所有使得 $x_3 = a$ 但 $x_2 \neq a$ 的 a 值。（提示：你需要 $4\theta \equiv \pm\theta$，模 2π。）

2 **手算卢卡斯－莱默检验法。**用这个检验法证明 $M_5 = 31$ 是质数，而 $M_{11} = 2047$ 不是。（对 M_{11} 你需要九步；用计算机会有帮助。把 2047 作因数分解，以验证你的结论。）

3 **一个具体例子。**取 $A = \frac{3}{2}$。求 a 和 t，并以数值验证公式 $y_1 = \sqrt{x_2^2 - 4}/x_2$。

4 **裂项相消的和。**较难设 $a = t + 1/t$ 且 $t > 1$，证明

$$\frac{1}{x_1 x_2 \cdots x_n} = \frac{t - t^{-1}}{t^{2^n} - t^{-2^n}}.$$

利用恒等式 $\dfrac{1}{z-1} - \dfrac{1}{z^2-1} = \dfrac{z}{z^2-1}$，其中 $z = t^{2^n}$，由此推出

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_1 x_2 x_3} + \cdots = \frac{1}{t}.$$

当 $a = 3$ 时，以数值验证这个结果。

延伸阅读

- **Ian Stewart, *Does God Play Dice?***（Penguin）。讲述混沌的经典科普著作，当中包括逻辑斯谛映射。
- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos***（CRC Press）。标准的大学本科入门教材；第 10 章讲述像本题这样的一维映射。
- **Marcus du Sautoy, *The Music of the Primes***（Fourth Estate）。书中包括搜索梅森质数的故事。

完整的引导式解答见第 2.8 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch02/squaring-minus-two.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com