2.7 六位还是六百位

工作纸

题目

STEP II 2023，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2023 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停”或“试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　你留意到这两列数有甚么特别吗？（看看哪些分数在两列中都有出现。）

阶段 1　第一个递推公式的项始终不小于 1

涵盖：第 (i) 部分

> **想一想**　把 x_{n+1} 改写成 $1+\dfrac{1}{\text{某个式子}}$ 的形式，然后使用归纳法（induction）。

阶段 2 第一个递推公式的误差

涵盖：第 (i) 部分

停一停，试一试 把 $x_{n+1}^2 - 2$ 写成以 x_n 表示的单一分数。分子有甚么值得留意的地方？$\frac{1}{(x_n+1)^2}$ 必定有多小？

阶段 3 十步

涵盖：第 (i) 部分

想一想 由 x_0 开始，把这个不等式（inequality）连用十次。至于不等号的方向，可留意 $x_n^2 - 2$ 的正负号：每走一步，它会怎样变化？

阶段 4　第二个递推公式的误差

涵盖：第 (ii) 部分

停一停，试一试　把 $y_{n+1} - \sqrt{2}$ 写成单一分数。分子应该会令你想起完全平方（perfect square）。然后用归纳法证明 $y_n \geq 1$。

阶段 5 误差的平方

涵盖：第 (ii) 部分

想一想 设 $e_n = y_n - \sqrt{2}$。利用 $y_n \geq 1$，以 e_n^2 给出 e_{n+1} 的上界（bound）。

停一停，试一试 用归纳法证明当 $n \geq 1$ 时 $e_n \leq 2r^{2^n}$，其中 $r = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$。请仔细检查归纳基础（base case）。

阶段 6　六百位数字

涵盖：第 (ii) 部分

> **想一想**　r 与 $\frac{1}{4}$ 相比，哪个较大？然后比较 2^{10} 与 10^3。

背后的数学

牛顿法

第二个方法其实是把牛顿法（Newton's method）应用于 $f(y) = y^2 - 2$。牛顿法求 f 的根的做法，是反复把猜测值 y 换成 y 处的切线与横轴的交点：

$$y_{\text{新}} = y - \frac{f(y)}{f'(y)} = y - \frac{y^2 - 2}{2y} = \frac{y^2 + 2}{2y}.$$

在单根（simple root）α 附近，由泰勒展开式（Taylor expansion）可知新误差约为 $\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \times (\text{旧误差})^2$，这就是牛顿法二次收敛（quadratic convergence）的原因。这个特殊情况，即“取 y 与 $2/y$ 的平均值”，古巴比伦人早已知道；一块约公元前 1700 年的泥板（现称为 YBC 7289）以 60 进制给出 $\sqrt{2}$ 的值，误差小于百万分之一。

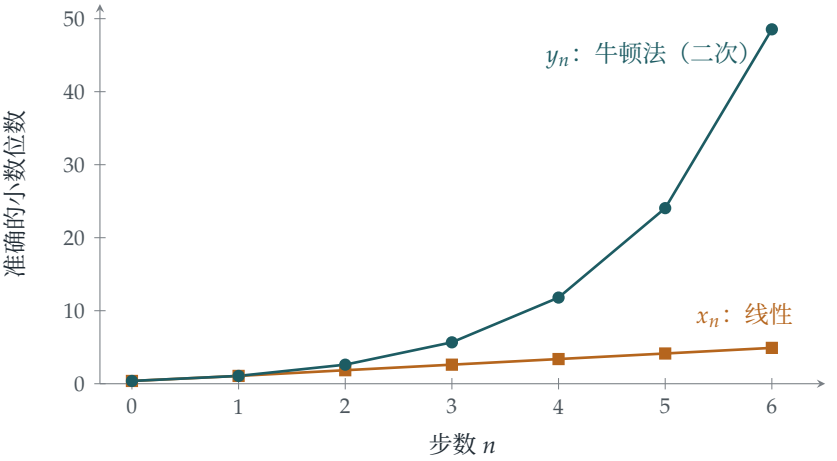

图 2.7.1 两个方法各走 n 步之后，$\sqrt{2}$ 的准确小数位数。线性的方法每一步增加约 0.77 位；牛顿法则每一步令准确位数大约加倍，到 $n = 10$ 时达到约 780 位。

不动点及其收敛速度

两个方法都具有 $u_{n+1} = g(u_n)$ 的形式，而且 $g(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$，所以 $\sqrt{2}$ 是一个*不动点*（fixed point），正如 Section 2.2 的蛛网图（cobweb diagram）所示。在不动点 α 附近，误差每一步大约乘以 $g'(\alpha)$。对第一个方法而言，$g(x) = \frac{x+2}{x+1}$，而 $g'(\sqrt{2}) = -\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2} = -(3-2\sqrt{2}) \approx -0.17$：负号解释了正负号为何交替，0.17 则解释了每一步为何增加 0.77 位（$\log_{10}(1/0.17) \approx 0.77$）。对牛顿法而言，$g'(\alpha) = 0$，所以线性项消失，误差由下一项（即平方项）决定。设计出满足 $g'(\alpha) = 0$ 的迭代（iteration），正是快速数值方法的精髓所在。

为何出现相同的分数

分数 $x_n = p_n/q_n$ 满足 $p_{n+1} = p_n + 2q_n$ 和 $q_{n+1} = p_n + q_n$，并且 $p_n^2 - 2q_n^2 = \pm 1$，正负交替。它们是*佩尔方程*（Pell's equation）$p^2 - 2q^2 = \pm 1$ 的解，也是连分数（continued fraction）$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \ldots]$ 的渐近分数（convergents）。它们来自 $1 + \sqrt{2}$ 的幂：$p_n + q_n\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^{n+1}$。牛顿法的每一步把 $p + q\sqrt{2}$ *平方*（不妨一试：$(p+q\sqrt{2})^2 = p^2 + 2q^2 + 2pq\sqrt{2}$，而 $\frac{p^2+2q^2}{2pq}$ 正是把牛顿法的公式应用于 p/q 的结果）。平方令指数加倍，这就是 $y_n = x_{2^n-1}$ 的原因。同样的“平方”模式，也是 Section 2.8 中迭代的动力来源。

延伸练习

1 **佩尔方程。**证明：若 $y_n = p/q$ 为最简分数，且 $p^2 - 2q^2 = 1$，则 $y_{n+1} = \dfrac{p^2 + 2q^2}{2pq}$ 亦满足这个方程。验证 $577^2 - 2 \times 408^2 = 1$。

2 **立方根。**写出应用于 $f(y) = y^3 - 2$ 的牛顿法，并证明新误差为 $\dfrac{(y_n - \alpha)^2(2y_n + \alpha)}{3y_n^2}$，其中 $\alpha = \sqrt[3]{2}$。由此推出：若 $y_n > \alpha$，则新误差最多是旧误差平方的 $\frac{1}{\alpha}$ 倍。（提示：利用 $\alpha^3 = 2$。）

3 **不用除法的除法。**证明应用于 $f(y) = \frac{1}{y} - a$ 的牛顿法给出 $y_{n+1} = y_n(2 - ay_n)$，当中无需除法。若 $e_n = 1 - ay_n$，证明 $e_{n+1} = e_n^2$。（电脑处理器正是用这类迭代来做除法的。）

4 **牛顿法失效的时候。**把牛顿法应用于 $f(y) = y^{1/3}$，它唯一的根是 0。证明无论从哪里开始，每一步都令与根的距离加倍。误差公式的哪一个假设不成立？

延伸阅读

- **Endre Süli & David Mayers, *An Introduction to Numerical Analysis***（Cambridge University Press）。标准的大学本科数值分析教科书；第 1 章讲述不动点迭代和牛顿法。
- **Nick Higham (ed.), *The Princeton Companion to Applied Mathematics***（Princeton University Press）。收录有关牛顿法和数值分析的短文，由专家执笔，面向广大读者。
- **David Fowler & Eleanor Robson, “Square root approximations in Old Babylonian mathematics: YBC 7289 in context”**（古巴比伦数学中的平方根近似值），*Historia Mathematica* 25 (1998)。

完整的引导式解答见第 2.7 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch02/newton-speed.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com