2.6 算术几何平均

工作纸

题目

STEP II 2024，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2024 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停”或“试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　为甚么两个不相等的正数的算术平均，总是大于它们的几何平均？你能用一行证明吗？

阶段 1 两个数列互相夹紧

涵盖：第 (i) 部分

想一想 利用题目给出的提示：$(\sqrt{x_n}-\sqrt{y_n})^2>0$。由此可知 x_{n+1} 与 y_{n+1} 有甚么关系？

想一想 为甚么 $x_{n+1}<x_n$ 而 $y_{n+1}>y_n$？这说明这两个数列（sequence）有甚么性质？

停一停，试一试 至于两者的差距，试比较 $x_{n+1}-y_{n+1}$ 与 $x_{n+1}-y_n$。每一步之后，差距按甚么倍数缩小？

阶段 2　代换

涵盖：第 (ii) 部分

想一想　设 $t = \frac{1}{2}\left(x - \frac{pq}{x}\right)$，计算 $t^2 + pq$ 和 $t^2 + \frac{1}{4}(p+q)^2$。它们可以因式分解（factorise）吗？

停一停，试一试　再求 $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$。当 x 由 0 变到 ∞ 时，t 如何变化？把各部分组合起来，并利用以 t 为变量的被积函数（integrand）是偶函数（even function）这一事实。

阶段 3 **计算积分**

涵盖：第 (ii) 部分

> **停一停，试一试** 由 (x_0, y_0) 开始，反复应用这个恒等式（identity）。当 $n \to \infty$ 时，$\mathrm{I}(x_n, y_n)$ 会怎样？直接计算 $\mathrm{I}(M, M)$。

背后的数学

比题目所说的还要快

第 (i) 部分证明了差距每一步至少减半，这相当于每一步大约多得一个二进制位。引子中的表格所显示的却惊人得多：正确位数每一步大约*增加一倍*（$2, 4, 10, 21, 43, \ldots$）。事实上

$$x_{n+1} - y_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x_n} - \sqrt{y_n}\right)^2 = \frac{(x_n - y_n)^2}{2\left(\sqrt{x_n} + \sqrt{y_n}\right)^2},$$

所以每个差距大约是一个常数乘以前一个差距的*平方*。这称为*二次收敛*（quadratic convergence），我们会在 Section 2.7 中仔细探讨。

椭圆积分

我们的积分 $\mathrm{I}(p, q)$ 其实是一个乔装了的*完全椭圆积分*（complete elliptic integral）。这类积分在计算椭圆的弧长时出现，而且不能用你所认识的函数表示。它最著名的应用是单摆。高级程度（A-level）课程中的周期公式 $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ 只是小幅度摆动时的近似。由角度 θ_0 释放的单摆，其准确周期是

$$T = \frac{2\pi\sqrt{L/g}}{M\left(1, \cos\frac{\theta_0}{2}\right)},$$

这是一个可用 AGM 求值的椭圆积分。当 $\theta_0 = 90^\circ$ 时，真正的周期比简单公式所预测的长约 18%。高斯那则日记所谈的是双纽线，一条 8 字形的曲线，它的总弧长涉及 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}$；

这个积分其实就是乔装了的 $\mathrm{I}(\sqrt{2},1)$，所以可以用 AGM 求值。

计算 π

1976 年，Richard Brent 与 Eugene Salamin 各自独立地把高斯的想法变成一个计算 π 的算法（algorithm），每一步都令正确位数增加一倍。二十五步便可得出数千万位。在 1980 及 1990 年代，这类算法曾用于多次刷新纪录的 π 计算；时至今日，凡是需要高精度的地方，类似的二次收敛算法已成为标准工具。试比较 Section 2.5 中的韦达（Viète）乘积，它每一步只多得约 0.6 位。

延伸练习

1 **二次收敛。**证明恒等式 $x_{n+1}-y_{n+1}=\dfrac{(x_n-y_n)^2}{2(\sqrt{x_n}+\sqrt{y_n})^2}$，并由此推出 $x_{n+1}-y_{n+1}\le\dfrac{(x_n-y_n)^2}{8y_0}$。

2 **亲手计算。**用计算机求 $M(2,1)$，准确至六位小数。你需要多少步？

3 **缩放。**证明对 $\lambda>0$ 有 $M(\lambda x,\lambda y)=\lambda M(x,y)$，以及 $\mathrm{I}(\lambda p,\lambda q)=\lambda^{-1}\mathrm{I}(p,q)$。验证这两个事实与 $\mathrm{I}(x_0,y_0)=\pi/(2M)$ 互相吻合。

4 **单摆。**利用上面的公式，求由 60° 释放的单摆的周期比小角度近似的预测值长多少，答案准确至三位有效数字。

延伸阅读

- **David Cox, “The arithmetic–geometric mean of Gauss”**, *L'Enseignement Mathématique* 30 (1984)。讲述这段历史和有关数学的经典文章；开首几节只需要微积分知识。
- **Jonathan Borwein & Peter Borwein, *Pi and the AGM*** (Wiley)。关于 AGM 与 π 的快速计算的权威著作。
- **Jonathan Borwein & Keith Devlin, *The Computer as Crucible*** (A. K. Peters)。讲述实验数学，包括像高斯那样凭着留意数值上的巧合而得出的发现。

完整的引导式解答见第 2.6 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch02/agm.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com