2.5 韦达乘积

工作纸

题目

STEP III 2022，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2022 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停”或“试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　sinh 的倍角公式是甚么？（如果不肯定，可把 $\sinh 2y$ 和 $\sinh y \cosh y$ 用指数函数写出来，再作比较。）

阶段 1 反复减半

涵盖：第 (i) 部分

想一想 $n = 1$ 的情况就是倍角公式（double-angle formula）$\sinh 2y = 2\sinh y \cosh y$，其中 $y = \frac{x}{2}$。

停一停，试一试 若公式对 n 成立，它的最后一个因子是 $\sinh(x/2^n)$。对这个因子应用倍角公式。至于其后的推论，把等式除以 x 再整理即可。

阶段 2　极限（limit）

涵盖：第 (ii) 部分

想一想　由 $\sinh y$ 的级数（series）可知，当 $y \to 0$ 时，$\frac{\sinh y}{y}$ 趋向甚么?

停一停，试一试　固定 x，在第 (i) 部分中令 $n \to \infty$。$\frac{x/2^n}{\sinh(x/2^n)}$ 会怎样?

阶段 3 $\ln 2$ 的公式

涵盖：第 (iii) 部分

想一想 取 $x = \ln 2$，则 $e^{x/2} = \sqrt{2}$。求出 $\cosh \frac{x}{2}$ 和 $\cosh \frac{x}{4}$，并加以化简。

停一停，试一试 找出 $\cosh(x/2^k)$ 的一般规律。把各个因子相乘时，2 的幂合起来是甚么？另外也求出 $\frac{\sinh x}{x}$。

阶段 4　韦达（Viète）公式

涵盖：第 (iv) 部分

想一想　第 (iv) 部分出现了 π，所以它必定来自普通的三角学。把 sinh 和 cosh 换成 sin 和 cos 之后，第 (i) 和第 (ii) 部分是否仍然成立?

停一停，试一试　选取 x 使得 $\frac{\sin x}{x} = \frac{2}{\pi}$，然后求出最初几个因子。半角公式（half-angle formula）$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$ 会有帮助。

背后的数学

阿基米德（Archimedes）的多边形

韦达公式有一个几何意义，可追溯至阿基米德。内接（inscribed）于半径为 1 的圆的正 2^n 边形，面积是 $A_n = 2^{n-1}\sin\frac{2\pi}{2^n}$。把边数加倍，面积就乘以

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{2^n \sin(\pi/2^n)}{2^{n-1}\cdot 2\sin(\pi/2^n)\cos(\pi/2^n)} = \frac{1}{\cos(\pi/2^n)}.$$

由正方形（$A_2 = 2$）开始，不断把边数加倍，面积便趋向圆的面积 π。所以 $\pi = 2 \div$

$(\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cdots)$，这正是韦达公式。乘积中的每个因子，都是图 2.5.1 中相邻两个多边形的面积之比。



图 2.5.1 内接于半径为 1 的圆的正多边形，边数分别为 4、8 和 16。边数每加倍一次，面积就多除以韦达乘积中的一个因子，而面积不断增大并趋向 π。

无穷乘积

韦达乘积是数学史上第一个无穷乘积。其后陆续有其他例子：沃利斯（John Wallis）在 1655 年发现 $\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots$，而欧拉（Euler）关于 $\frac{\sin x}{x}$ 的乘积已在 Section 2.4 出现过。到了大学，你会学到无穷乘积在甚么情况下收敛（converge）。粗略地说，当 $\prod(1+a_n)$ 中的 a_n 是细小的正数时，它的表现与 $\sum a_n$ 相似，因为 $\ln(1+a_n)\approx a_n$。这里 $1-\cos(\pi/2^n)\approx\frac{1}{2}(\pi/2^n)^2$，每次缩小 4 倍，所以这个乘积收敛得很快。

有多快?

乘了 n 个因子之后，部分积恰好等于 $\dfrac{1}{2^n\sin(\pi/2^{n+1})}$，其误差大约是 $\frac{\pi^2}{6\cdot 4^{n+1}}$ 乘以 $\frac{2}{\pi}$。每多一个因子，答案的准确度大约提高 4 倍，即多得大约 0.6 个小数位。十个因子可使 $2/\pi$ 准确至六个小数位。这已经不错，但远远不及 Section 2.6 的方法那么快，那些方法每一步都令准确的位数加倍。

延伸练习

1 **1990 年的版本。**试做 STEP I 1990，第 8 题（step.maths.org/questions/90-s1-q8）。它循一条与本节不同的途径得出韦达乘积，所用的不外乎 sin 的倍角公式。你觉得哪一种方法较为自然?

2 **另一个角。**在 $\frac{\sin x}{x}$ 的乘积中取 $x=\frac{\pi}{3}$，把 $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$ 写成无穷乘积，并化简最初两个因子。

3 **要多少个因子？** 用计算机找出韦达乘积需要多少个因子，才能使 π 准确至 4 个小数位。解释为甚么每多一个因子大约多得 0.6 个数位。

4 $\ln 3$ **的公式。** 取 $x = \ln 3$ 重做第 (iii) 部分，把 $\frac{1}{\ln 3}$ 写成无穷乘积。需要多少个因子才能使 $\frac{1}{\ln 3}$ 准确至两个小数位？为甚么这个乘积收敛得比韦达乘积慢？

延伸阅读

- **Petr Beckmann, *A History of* π**（St Martin's Press）。阿基米德、韦达、沃利斯等人的故事，写得兴味盎然。
- **Jonathan Borwein & Peter Borwein, *Pi and the AGM***（Wiley）。关于计算 π 的严谨数学，包括 Section 2.6 的方法。读完本章之后，第 1 章应该读得懂。
- **Eli Maor, *Trigonometric Delights***（Princeton University Press）。书中有一章专门讲述韦达和他的乘积。

完整的引导式解答见第 2.5 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch02/viete.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com