2.4 $\pi^2/6$

工作纸

题目

STEP III 2018，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/18-s3-q7

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停”或“试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　若多项式 $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ 的根为 $r_1, \dots, r_n$，那么 $r_1 + \cdots + r_n$ 以系数表示是甚么？

阶段 1　棣美弗定理（De Moivre's theorem）

涵盖：第 (i) 部分

想一想　把 $\cot\theta + \mathrm{i}$ 写成以 $\sin\theta$ 为分母的单一分数。分子有甚么特别之处？

停一停，试一试　利用棣美弗定理，把 $\cot\theta + \mathrm{i}$ 和 $\cot\theta - \mathrm{i}$ 分别取 $2n+1$ 次方，然后相减。

阶段 2　多项式（polynomial）

涵盖：第 (i) 部分

想一想　现在用二项式定理（binomial theorem）展开 $(c+\mathrm{i})^{2n+1}-(c-\mathrm{i})^{2n+1}$，其中 $c=\cot\theta$。哪些项会互相抵消，哪些项会变成两倍？

停一停，试一试　哪些 θ 会使 $\sin(2n+1)\theta=0$ 但 $\sin\theta\neq 0$？利用这些值，求出以 $x=\cot^2\theta$ 为变量的多项式的 n 个不同的根（root）。为甚么这些就是它的全部根？

阶段 3 把根相加

涵盖：第 (ii) 部分

停一停，试一试 若多项式 $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ 的根为 $r_1, \ldots, r_n$，则 $r_1 + \cdots + r_n = -a_{n-1}/a_n$。从第 (i) 部分读出这两个系数（coefficient）。

阶段 4　夹逼（squeeze）

涵盖：第 (iii) 部分

> **想一想**　由 $0 < \sin\theta < \theta < \tan\theta$（其中 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$）出发。取倒数（reciprocal），再平方。$\frac{1}{\sin^2\theta}$ 与 $\cot^2\theta$ 有甚么关系？

> **停一停，试一试**　代入 $\theta = \frac{m\pi}{2n+1}$，并对 $m = 1, \dots, n$ 求和。第 (ii) 部分给出了外侧的两个和。当 $n \to \infty$ 时，上下界趋向甚么？

背后的数学

欧拉的大胆论证

以现代标准来看，欧拉本人在 1734 年的论证并不严格，却令人目眩神迷。一个多项式若以 $\pm a, \pm b, \pm c, \dots$ 为根，且在 0 处取值 1，便可分解为 $(1 - x^2/a^2)(1 - x^2/b^2)\cdots$。函数 $\frac{\sin x}{x}$ 在 0 处取值 1，而它的根是 $\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$，于是欧拉把它当作一个“无限多项式”，写下

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots .$$

右边 x^2 的系数是 $-\frac{1}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots\right)$，而由麦克劳林级数（Maclaurin series）$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{6}+\cdots$ 可知它是 $-\frac{1}{6}$。两相比较便得 $\pi^2/6$。我们这个 STEP 证明正是同一想法的有限而严格的版本：一个多项式，它的根与 π 的倍数息息相关，再加上它的第二个系数。

平方倒数以外

欧拉其后还求出 $\sum 1/m^4=\pi^4/90$、$\sum 1/m^6=\pi^6/945$，而一般而言 $\sum 1/m^{2k}$ 是 π^{2k} 的有理数倍，当中涉及*伯努利数*（*Bernoulli numbers*）。奇数次幂则是另一回事：正如我们在 Section 2.3 所见，没有人知道 $\sum 1/m^3$ 的公式。这些和就是黎曼 ζ 函数（Riemann zeta function）的值 $\zeta(2),\zeta(4),\ldots$，而这个函数在复数自变量上的表现，支配着质数的分布（Section 1.2）。

日后在哪里再遇上

在大学里，你会至少再遇到 $\zeta(2)=\pi^2/6$ 的三个证明：一个来自*傅里叶级数*（*Fourier series*）（把函数写成正弦和余弦之和），一个来自二重积分（double integral），还有一个来自复分析（complex analysis）。这个数也在概率中出现：随机选出的两个整数没有公因数的机会是 $6/\pi^2\approx 0.61$。（质数 p 同时整除两者的概率是 $1/p^2$，所以没有任何质数同时整除两者的机会是 $\prod_p(1-1/p^2)$，而欧拉证明了这个乘积等于 $1/\zeta(2)$。）π 在概率极限中的另一次现身，是 Section 12.23 的主题。

延伸练习

1 **1992 年的版本。**试做 STEP III 1992，第 8 题（step.maths.org/questions/92-s3-q8）。它利用一个与本节相似的多项式，求出正切平方与余割平方的准确和。（提示：若你知道一个多项式的根是 r_i，那么哪个多项式的根是 $1/r_i$?）

2 **奇数的平方。**由 $\sum 1/m^2=\pi^2/6$ 推导出 $1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$。

3 **四次方。**较难利用 $\sum r_i^2=(\sum r_i)^2-2\sum_{i<j}r_ir_j$ 和多项式的系数，求 $\sum_{m=1}^{n}\cot^4\left(\frac{m\pi}{2n+1}\right)$，并改动夹逼的论证以证明 $\sum 1/m^4=\pi^4/90$。

4 **有多快?** 利用第 (iii) 部分的下界，证明 $\frac{\pi^2}{6}-\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^2}<\frac{\pi^2}{4n}$。按这个结果，$n$ 要多大才能保证部分和与 $\pi^2/6$ 相差不超过 0.001？试与真正的误差比较，后者接近 $1/n$。

延伸阅读

► **William Dunham, *Euler: The Master of Us All***（Mathematical Association of America）。

第 3 章讲述巴塞尔问题的故事，并完整交代当中的数学。

- **Aigner & Ziegler, *Proofs from THE BOOK***，第 9 章“Three times $\pi^2/6$”。当中包括本节的证明。
- **Paul Nahin, *Dr. Euler's Fabulous Formula***（Princeton University Press）。内容涵盖复数、傅里叶级数，以及类似本节的求和。

完整的引导式解答见第 2.4 节：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch02/basel.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com