2.3 一个发散级数与它的收敛近亲

工作纸

题目

STEP III 2014，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/14-s3-q8

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停”或“试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　第一个不等式谈的是由 $r = k^{n}$ 至 $r = k^{n+1} - 1$ 的那一块。取 $k = 2$ 和 $n = 3$，这一块包含哪些项？共有多少项？

阶段 1 估计一个区块的界

涵盖：第一个不等式

想一想 取 $k = 2$ 和 $n = 3$，由 $r = k^n$ 到 $r = k^{n+1} - 1$ 的区块（block）包含哪些项？共有多少项？一般而言，这个区块有多少项？

停一停，试一试 f 是递减（decreasing）的。在这个区块内，$f(r)$ 的最小值和最大值分别是甚么？把它们各自乘以项数。

阶段 2　调和级数

涵盖：第 (i) 部分

想一想　取 $k = 2$ 和 $f(r) = \frac{1}{r}$，求出由 2^n 到 $2^{n+1} - 1$ 这个区块的两个界（bounds）。

停一停，试一试　每个区块的贡献都至少是同一个固定的量。把 $n = 0, 1, \ldots, N$ 的区块加起来：当 $N \to \infty$ 时，部分和（partial sums）会怎样？

阶段 3 立方倒数之和

涵盖：第 (ii) 部分

想一想 现在取 $f(r) = \frac{1}{r^3}$，仍然取 $k = 2$。第 n 个区块的上界（upper bound）是甚么？

停一停，试一试 $n = 0, 1, 2, \ldots$ 的区块刚好把每个正整数覆盖一次。把各个上界加起来：这是一个等比级数（geometric series）。

阶段 4　数算不含 2 的数

涵盖：第 (iii) 部分

> **停一停，试一试**　把 0 至 999 的每个数都写成三位数，容许前导零（leading zeros）（例如 7 写成 007）。如果不准使用 2，每个数位有多少个选择？记得把 0 剔除。

阶段 5 Kempner 级数

涵盖：第 (iii) 部分

? **想一想** 按数字的位数来划分区块；这就像取 $k = 10$。

停一停，试一试 有多少个 d 位数完全不含 2？（首位数字不可以是 0。）一个 d 位数最小可以是多少？估计每个区块的贡献的界，然后对 d 求和。

背后的数学

凝聚判别法

题目中的第一个不等式正是*柯西凝聚判别法*（Cauchy's condensation test）的核心：若 f 为正且递减，则

$$\sum_{r=1}^{\infty} f(r) \text{ 收敛} \iff \sum_{n=0}^{\infty} 2^n f(2^n) \text{ 收敛。}$$

它把困难的级数变成容易的级数。应用于 $f(r) = 1/r^p$，便得到 $\sum 2^n \cdot 2^{-np} = \sum (2^{1-p})^n$，这是一个等比级数，恰好在 $p > 1$ 时收敛。应用于 $1/(r \ln r)$，可知连这个级数也发散；应用于 $1/(r(\ln r)^2)$，则可知这个级数收敛。这个论证可追溯至奥雷姆（Nicole Oresme），

他在大约 1350 年正是用图 2.3.1（见网上该节的完整版）中的分块方法，证明了调和级数发散。

调和级数发散得有多慢

图 2.3.1（见网上该节的完整版）显示每一块的贡献大约是 $\ln 2$，所以首 N 项之和应该大约是 $\log_2 N \times \ln 2 = \ln N$。事实上

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} = \ln N + \gamma + (\text{某个趋向 } 0 \text{ 的量}),$$

其中 $\gamma = 0.5772\ldots$ 是欧拉－马斯刻若尼常数（Euler–Mascheroni constant）。至今没有人知道 γ 是否有理数（rational）。你会在大学一年级的分析课中用积分证明这条公式，而调和数（harmonic numbers）会在 Section 9.11 和 Section 11.12 再次出现。

大多数的数都含有 2

Kempner 级数为甚么收敛？因为在大数之中，“不含 2 的数”非常罕有：在小于 10^d 的数之中，不含 2 的所占比例至多是 $(0.9)^d$，而这个比例趋向 0。在 100 位数之中，只有不足 0.003% 能避开数字 2。所以我们删去的并不是十分之一的项，而是几乎所有的项。我们求得的界 80 相当宽松：1979 年，Robert Baillie 用一种加速方法把这个和计算到小数点后许多位，其值约为 19.257。

幂的倒数之和

第 (ii) 部分的和是 $\zeta(3)$，即我们在 Section 1.2 遇过的黎曼（Riemann）zeta 函数的一个值。在 Section 2.4 我们会求出 $\zeta(2) = \pi^2/6$ 的准确值，而欧拉（Euler）亦找到了 $\zeta(4), \zeta(6), \ldots$ 的公式。但至今没有人找到 $\zeta(3)$ 的公式。1978 年，Roger Apéry 证明了 $\zeta(3)$ 是无理数（irrational），震惊了整个数学界；他所用的积分与 Section 2.9 中的颇为相似。至于 $\zeta(5)$ 是否无理数，至今仍然未知。

延伸练习

1. **感受一下有多慢。**利用 $\sum_{r \le N} 1/r \approx \ln N + 0.5772$，估计调和级数需要多少项才超过 10，以及需要多少项才超过 100。

2. **判别法的实际运用。**用第 (i) 部分的方法，取 $f(r) = 1/r^2$，证明 $\sum 1/r^2 \le 2$。然后把第一项分开处理，从而改进这个界。

3. **在收敛与发散之间。**利用 $k = 2$ 的分块不等式，证明 $\sum_{r \ge 2} \dfrac{1}{r \ln r}$ 发散，而 $\sum_{r \ge 2} \dfrac{1}{r (\ln r)^2}$ 收敛。

4 **排除更多数字。**较难证明：十进制表示中既不含 2 亦不含 7 的所有正整数，其倒数（reciprocal）之和小于 35。（你看得出 35 是怎样来的吗?）

延伸阅读

- **Julian Havil, *Gamma: Exploring Euler's Constant***（Princeton University Press）。讲述调和级数、γ 以及更多相关课题，为程度较高的中学生而写。
- **Mary Hart, *Guide to Analysis***（Palgrave）。一本简明的大学一年级教科书，其中论级数与比较判别法的一章写得十分清晰。
- **Robert Baillie, "Sums of reciprocals of integers missing a given digit"**, *American Mathematical Monthly* 86 (1979)。一篇短论文（论缺少某个指定数字的整数的倒数之和），读完本节后你便有能力读懂。

完整的引导式解答见第 2.3 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch02/kempner.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com