2.2 作为极限的黄金比例

工作纸

题目

STEP II 2013，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/13-s2-q6

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停”或“试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　你认得这些分子和分母吗？再看看小数值：$1, 2, 1.5, 1.667, 1.6, 1.625, 1.615, \ldots$。这个数列是递增的吗？还是递减的？

阶段 1 比较相隔两项的项

涵盖：第 (i) 部分

想一想 利用 $(*)$ 把 $u_{n+2}-u_n$ 写成 $\frac{1}{u_{n+1}}-\frac{1}{u_{n-1}}$，然后通分（common denominator）。

停一停，试一试 对 $u_{n+1}-u_{n-1}$ 作同样的处理，再把两个结果合并。然后利用 $(*)$ 化简分母中的乘积 $u_{n+1}u_n$ 和 $u_{n-1}u_{n-2}$。

阶段 2　一个陷阱

涵盖：第 (ii) 部分

> **停一停，试一试**　在使用第 (i) 部分之前，先用归纳法（induction）证明对所有 n 都有 $1 \le u_n \le 2$。若 $1 \le u_n \le 2$，$\dfrac{1}{u_n}$ 最大可以是多少？

阶段 3 两个单调子数列

涵盖：第 (iii) 部分

想一想 第 (i) 部分说明 $u_{n+2} - u_n$ 是 $u_n - u_{n-2}$ 的正数倍。那么，对于 $u_3 - u_1$，$u_5 - u_3, u_7 - u_5, \ldots$ 的正负号，你可以得出甚么结论?

想一想 奇数项是递增（increasing）还是递减（decreasing）？偶数项呢？它们是否有界（bounded）?

停一停，试一试 题目给出的定理是关于递增数列的。怎样才能把它应用到一个递减而有下界（bounded below）的数列上?

阶段 4　求出极限

涵盖：第 (iii) 部分

想一想　使用 $(*)$ 两次，把 u_{n+2} 直接用 u_n 表示。

停一停，试一试　令 $n \to \infty$，先取奇数值，再取偶数值。两个极限（limit）都满足同一个二次方程（quadratic equation）：它是哪一个根？为甚么由此可知整个数列收敛（converge）？

阶段 5 从另一个起点出发

涵盖：最后一部分，由 $u_1 = 3$ 开始

> **想一想** 取 $u_1 = 3$，写出数列的首几项。你之前的论证中，哪些仍然成立？又是从哪一项开始成立？

背后的数学

蛛网图与不动点

每个由 $u_{n+1} = f(u_n)$ 定义的数列，都可以画成一幅蛛网图（*cobweb diagram*）（图 2.2.1）。画出 $y = f(x)$ 和 $y = x$。由 x 轴上的 u_1 出发，垂直走到曲线（高度为 $u_2 = f(u_1)$），再水平走到直线 $y = x$（这样便移到 $x = u_2$），然后再垂直走到曲线，如此类推。这里 $f(x) = 1 + 1/x$ 是递减的，所以路径会向内盘旋，交替地过高和过低，趋向曲线与直线相交的那一点：不动点（*fixed point*）φ，该处 $f(\varphi) = \varphi$。

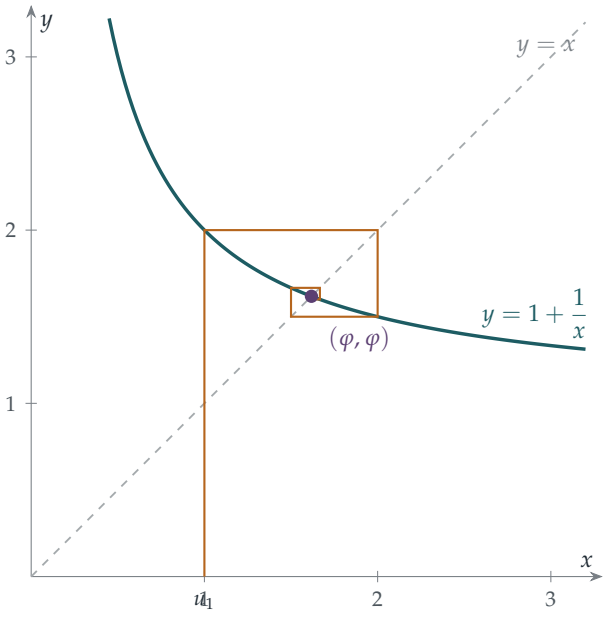

图 2.2.1　$u_{n+1} = 1 + 1/u_n$ 由 $u_1 = 1$ 出发的蛛网图。路径向上走到曲线，再横向走到直线 $y = x$，如此不断重复。由于曲线向下倾斜，路径会向内盘旋，趋向不动点 $\varphi \approx 1.618$，并且交替落在两侧：这就是奇数项与偶数项的锯齿状摆动。

有多快，为甚么

第 (i) 部分中的因子 $(1+u_n)(1+u_{n-2})$ 从何而来？在不动点附近，$u_{n+1} - \varphi = f(u_n) - f(\varphi) \approx f'(\varphi)(u_n - \varphi)$，而 $f'(\varphi) = -1/\varphi^2 \approx -0.38$。所以每走一步，误差大约乘以 -0.38：正负号反转（锯齿状摆动），大小缩减（收敛）。走两步则乘以 $1/\varphi^4 \approx 0.146$，这正是 $1/\big((1+u_n)(1+u_{n-2})\big)$ 所趋向的值。到了大学，这会发展成*压缩映射定理*（*contraction mapping theorem*）：若在不动点附近有 $|f'| \le k < 1$，则迭代会收敛至该不动点，而误差至少以几何级数的速度缩小。它是数学中最有用的定理之一，也是用来证明微分方程有解的方法（第 8 章）。在 Section 2.8 中，我们会遇到一个不动点*并不*吸引的映射，结果截然不同。

最无理的数

各项 $u_n = F_{n+1}/F_n$ 是同等大小的分数之中对 φ 最好的逼近，但所谓“最好”其实并不太好：φ 比任何其他数都更难用分数逼近。原因可从它的连分数（continued fraction）$[1;1,1,1,\ldots]$ 看出：连分数中出现大的项，就表示有非常好的逼近（试想 $\pi = [3;7,15,1,292,\ldots]$ 和极佳的 $\frac{355}{113}$），而 φ 的每一项自始至终都是最小的。赫维兹（Adolf Hurwitz）于 1891 年证明，对每个无理数（irrational）x，都有无穷多个分数满足 $|x - p/q| < 1/(\sqrt{5}\,q^2)$，而且 $\sqrt{5}$ 不能再改进，原因正正在于 φ。这种“最大无理性”，

就是黄金角出现在向日葵种子螺旋图案中的原因。

延伸练习

1 **藏在其中的斐波那契数。**证明 $u_n = F_{n+1}/F_n$，其中 $F_1 = F_2 = 1$ 及 $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$。

2 **误差缩小。**证明 $u_{n+1} - \varphi = -\dfrac{u_n - \varphi}{\varphi\, u_n}$，并由此推出对所有 n 均有 $|u_n - \varphi| \le \varphi^{-(n-1)}$。（利用 $\varphi^2 = \varphi + 1$ 及 $u_n \ge 1$。）

3 **令数列中断。**证明若 $u_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$，则数列是常数数列。求出所有使得某个 $u_n = 0$、以致数列无法继续下去的初始值 u_1。（提示：由 $u_n = 0$ 倒推回去。）

4 **$\sqrt{2}$ 的近亲。**设 $v_1 = 1$ 及 $v_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1 + v_n}$。仿照本题的方法，证明 $v_n \to \sqrt{2}$，并把 $\sqrt{2}$ 写成连分数。

延伸阅读

- **Mario Livio, *The Golden Ratio***（Broadway）。讲述 φ 的历史，把真正的数学与众多迷思区分开来。
- **C. D. Olds, *Continued Fractions***（Mathematical Association of America）。一本简短而非常易读的入门书，对象是能力较强的中学生。
- **J. C. Burkill, *A First Course in Mathematical Analysis***（Cambridge University Press）。严谨地处理单调数列与完备性，并附有大量习题。

完整的引导式解答见第 2.2 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch02/golden-limit.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com