2.1 “最终”是甚么意思

工作纸

题目

STEP III 2015，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/15-s3-q2

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停”或“试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　定义中有“存在正整数 m”这句话。要证明 $(s_n) \le (t_n)$，你究竟要拿出甚么来？要证明它是假的，你又要说明甚么？

阶段 1　线性函数（linear function）对二次函数（quadratic）

涵盖：第 (i) 部分

> **想一想**　最初的几项并不重要。对哪些 n 有 $1000n \le n^2$？把两边同时除以 n，它是正数。

阶段 2 “最终较小”（eventually smaller）跟平常的“较小”一样吗？

涵盖：第 (ii) 部分

想一想 把“$(s_n) \leq (t_n)$ 不成立”完整地写出来，但前面不可以用“不”字。$s_n > t_n$ 必须发生多少次？

停一停，试一试 找两个由正数组成的数列（sequence），让它们永远不断互换位置，使得任何一个都不会最终小于另一个。

阶段 3　串连

涵盖：第 (iii) 部分

想一想　每个假设都有它自己的 m，而且两者可能不同。把它们称为 m_1 和 m_2。

停一停，试一试　哪一个 m 的值能使两个不等式（inequality）对所有 $n \geq m$ 都成立？

阶段 4 二次函数对指数函数（exponential）

涵盖：第 (iv) 部分

想一想 列一个表，写出 n^2 和 2^n 在 $n = 1, \ldots, 8$ 时的值。$n^2 \le 2^n$ 看来从哪里开始成立？

停一停，试一试 用归纳法（induction）证明。要从 $n^2 \le 2^n$ 推到 $(n+1)^2 \le 2 \cdot 2^n$，只需知道 $(n+1)^2 \le 2n^2$ 便足够。这对哪些 n 成立？

背后的数学

分析的语言

在牛顿（Newton）和莱布尼兹（Leibniz）之后约 150 年间，数学家运用极限（limit）和无穷小（infinitesimal）出神入化，却说不清楚它们确切是甚么意思。贝克莱主教（Bishop Berkeley）在 1734 年嘲讽无穷小是“已逝之量的鬼魂”，他说的不无道理。补救要等到十九世纪：柯西（Augustin-Louis Cauchy）以及其后的魏尔斯特拉斯（Karl Weierstrass），以由“对每个”和“存在”构成的命题，取代了“变得无限接近”这类含糊的说法。现

代的定义

$$a_n \to L \iff \text{对每个}\varepsilon > 0\text{，都存在}N\text{，使得}|a_n - L| < \varepsilon \text{ 适用于所有}n \geq N$$

跟本题的定义模样完全相同，只是前面多了一个量词。这是你在大学分析课程里最先遇到的东西。

增长的阶

第 (iv) 部分是一道著名阶梯（增长的阶，orders of growth）的其中一小级。对任何固定的 $k > 0$ 和 $c > 1$，

$$(\ln n) \leq (n^k), \qquad (n^k) \leq (c^n), \qquad (c^n) \leq (n!), \qquad (n!) \leq (n^n),$$

而事实上，每个数列不单最终小于下一个，更是最终小于下一个的*任何常数倍*。哈代（G. H. Hardy）为这类比较写了一整本书：*Orders of Infinity*（1910）。今天它已是计算机科学的日常语言，“这个算法需要 $O(n^2)$ 步”的意思，就是步数最终不超过 n^2 的某个常数倍。n^2 与 2^n 之别，就是一个会完成的程序，与一个到太阳燃尽也完成不了的程序之别。

并非全序的序

第 (ii) 部分说明“最终小于”不是*全序*（total order）：有些数列对根本无法比较。这类具有传递性但不能比较所有东西的关系，称为*预序*（preorder）或*偏序*（partial order），而且随处可见：整数的整除性、集合的包含关系，以及“是……的子群（subgroup）”都是例子。辨别一个关系具有哪些性质、不具有哪些性质，是数学家训练的一部分。

延伸练习

---

1. **样本试卷热身题。**试做 STEP III Specimen paper，第 2 题（step.maths.org/questions/spec-s3-q2），此题出自 1987 年首届 STEP 举行之前发出的试卷。（*最后一部分的提示：*利用二项展开式（binomial expansion）的下一项。）

2. **两边都成立。**证明若 $(s_n) \leq (t_n)$ 且 $(t_n) \leq (s_n)$，则对所有足够大的 n 都有 $s_n = t_n$。

3. **竞逐无穷。**试找出两个*递增*的正数数列，两者皆趋向无穷大，而任何一个都不是最终小于另一个。

4. **拾级而上。**证明 $(2^n) \leq (n!)$，并给出一个明确的 m。然后证明 $(n^{10}) \leq (2^n)$，并求出可行的最小 m。（第二部分用试算表会有帮助；答案大得出人意表。）

延伸阅读

- **Lara Alcock, *How to Study for a Mathematics Degree***(牛津大学出版社 Oxford University Press)。第 3 章讲的正是这种逻辑语言，以及大学新生为何觉得它困难。
- **Lara Alcock, *How to Think About Analysis***（牛津大学出版社 Oxford University Press)。一本亲切易读的指南，讲解大学一年级分析的各个定义。
- **Daniel Velleman, *How to Prove It***（剑桥大学出版社 Cambridge University Press)。有系统地介绍逻辑、量词与证明。

完整的引导式解答见第 2.1 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch02/eventually.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com