13.6 累积起来的误差

工作纸

题目

STEP II 1993，第 15 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s2-q15

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有*停一停，试一试*的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想** 若某数的小数部分 U 在 $[0,1)$ 上均匀分布（uniform），把该数截断时误差是多少？舍入时又是多少？两者的平均值（mean）和方差（variance）各是多少？

阶段 1 总误差

涵盖：单一数字的误差，以及 1500 个数字相加

想一想 若某数的小数部分（fractional part）在 $[0,1)$ 上服从均匀分布（uniform distribution），把它截断（truncate）时误差是多少？把它舍入（round）时又是多少？分别求出两种误差的平均值（mean）和方差（variance）。

停一停，试一试 总误差是 1500 个独立（independent）误差之和。对每部电脑而言，总误差的平均值和方差分别是多少？哪一条定理容许你把它当作正态分布（normal distribution）来处理？

阶段 2　出现大误差的概率

涵盖：1500 个数字相加

> **想一想**　对于采用舍入的电脑，把 15 标准化（standardise），然后查正态分布表。至于采用截断的电脑，总误差几乎必定落在哪里？

阶段 3 要做多少次加法？

涵盖：LEP 要做多少次加法

想一想 做了 n 次加法之后，LEP 的误差的标准差（standard deviation）是多少？利用 $\mathrm{P}(|Z| < 1.645) = 0.9$，解出 n。

背后的数学

偏差与方差

截断是*有偏*（biased）的：其误差的平均值不是零，而偏差（bias）会线性累积。舍入是*无偏*（unbiased）的，其误差的表现有如随机漫步，增长速度相当于 $\sqrt{n}$。经过一百万次运算后，两者的分别就是数量级为 500 000 的误差与数量级为 300 的误差之别。这与实验中系统误差（systematic error，例如仪器校准失准）和随机测量误差（random error）之间的区别如出一辙：把多次测量结果取平均，可以减少随机误差，对系统误差却毫无作用。

浮点数

所有电脑都只能以有限的精确度储存实数，每次算术运算都要把结果舍入。现代电脑遵从 IEEE 754 标准，把结果舍入至最接近的可表示数；若刚好位于两数正中，则取末位为偶数的一个，目的正是令舍入平均而言无偏。即使如此，把大量数字相加时若不小心处理，仍会损失准确度；William Kahan 的*补偿求和*（compensated summation）算法（1965 年）会记录失去的低位数字，再把它们加回去。1991 年波斯湾战争期间，一个爱国者导弹连未能拦截一枚来袭导弹，原因是它的时钟以十分之一秒为单位计时，而这个数无法以二进制准确储存；连续运作 100 小时后，截断误差已增至约三分之一秒，足以令目标位置的估算偏差超过半公里。

温哥华指数

温哥华证券交易所指数于 1982 年 1 月设立，起始值为 1000.000。到 1983 年 11 月，尽管大市普遍上升，指数却已跌至约 524。顾问发现，指数每天重新计算数千次，而每次都截断（而非舍入）至小数点后三位。经过一个周末的正确重算，指数重开时约为 1098。这件事已成为数值计算课程中的经典警示。

延伸练习

1 **修正 VOZ。**若 VOZ 在最后把 $\frac{n}{2}$ 加到答案上，其误差的分布是甚么？它现在是否与 LEP 一样好？

2 **舍入至小数点后一位。**若把各数舍入至小数点后一位，而被舍去的数字均匀分布，求把 10 000 个数相加时总误差的标准差。

3 **温哥华指数。**若指数每天重新计算 3000 次，每次截断平均损失 0.0005，那么在一年 250 个交易日内，指数会损失多少？

4 **精确分布。**求两个舍入误差之和的精确密度函数（density，呈三角形）。若是三个误差之和，试绘出其草图。它多快便开始貌似正态分布？

延伸阅读

- **Nicholas Higham, *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms***（SIAM）。关于舍入误差的权威著作；第一章浅白易读。
- **David Goldberg, "What every computer scientist should know about floating-point arithmetic"**, *ACM Computing Surveys* 23 (1991)。经典之作，可在网上免费阅读。
- **Tim Harford, *How to Make the World Add Up***（Bridge Street），探讨数据中的系统误差。

完整的引导式解答见第 13.6 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch13/errors-add-up.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com