12.8 Penney 游戏

工作纸

题目

STEP III 2001，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/01-s3-q13

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有停一停，试一试的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想** 假设至今的投掷结果以 TT 结尾，而且仍未有人胜出。THH 有没有可能比 TTH 先出现?

阶段 1 状态

涵盖：第 (i) 部分

> **想一想** 一旦出现了 TT，THH 还有可能比 TTH 先出现吗? 然后设 p_{XY} 为最后两次掷币结果是 XY 时 A 获胜的概率（probability）。为四个状态（state）各写出一条方程。

阶段 2 求解

涵盖：第 (i) 部分

想一想 解这四条方程。每一种开首的两次结果，概率都是 $\frac{1}{4}$。

阶段 3 B 对 C

涵盖：第 (ii) 部分

停一停，试一试 C 想要 HHT，而 B 想要 THH。如果游戏以 HH 开始，谁会获胜？如果不是，看看第一个 HH 的前一次掷出甚么。

阶段 4 循环

涵盖：第 (iii) 部分

> ? **想一想** 对于 C 对 D，仿照第 (i) 部分设立状态。对于 D 对 A，把第 (ii) 部分中的正面（heads）与反面（tails）互换。

背后的数学

为甚么有些序列较好

在任何一个位置，所有三次投掷的序列出现的机会都相同，而每个序列的期望等待时间（expected waiting time）也不难计算。但各序列的等待时间并不相同：TTH 平均要等 8 次投掷，TTT 却要等 14 次，因为与自身重叠的序列（例如 TTT，只差一步的 TTH 会令已累积的两次投掷前功尽废）出现得较慢。而在两个序列的竞赛中，关键在于每个序列与对方如何重叠。THH 胜 HHT，是因为 HHT 每次出现（除了在最开头之外），前面都有一个 T，这表示 THH 刚刚已经出现。后选一方的窍门总是一样：取对手序列的头两个符号，再在前面加上与对手中间符号相反的那个符号。

康威公式（Conway's formula）

约翰·康威发现了一条计算胜算的绝妙公式。对于长度为 n 的两个序列 X 和 Y，定义相关数（correlation）XY 为一个 n 位的二进制数：由左至右，若 X 中由第 i 个符号开始的部分与 Y 开头相同长度的部分相同，则第 i 位为 1。那么 Y 比 X 先出现的胜算是

$$(XX - XY) : (YY - YX).$$

取 $X = \mathrm{HHT}$ 及 $Y = \mathrm{THH}$：$XX = 100_2 = 4$（只有整个 HHT 与自身吻合）；$XY = 001_2 = 1$（只有 HHT 末尾的 T 与 THH 的开头吻合）；$YY = 100_2 = 4$；而 $YX = 011_2 = 3$（THH 末尾的 HH 和 H 都与 HHT 的开头吻合）。所以 THH 先出现的胜算是 $(4-1) : (4-3) = 3 : 1$，即第 3 阶段的 $\frac{3}{4}$。康威公式适用于任何长度、任何字母表的序列，其证明用到鞅（martingale）的理论：想像有一间赌场，赌客就序列的出现下注，再利用公平游戏的期望利润为零这

一事实。

Penney 与加德纳（Gardner）

Walter Penney 于 1969 年在 *Journal of Recreational Mathematics* 的一篇短文中介绍了这个游戏。马丁·加德纳于 1974 年在他的 *Scientific American* 专栏中介绍了它，使它广为人知，文中还包括康威公式，这条公式是康威发现的，但他一直没有发表。这类非传递关系（埃弗龙骰子（Efron's dice）是另一个例子：骰子 A 胜 B，B 胜 C，C 胜 D，而 D 胜 A）一再令人惊讶，在投票理论中也很重要，因为多数人的偏好可以形成循环：这就是孔多塞悖论（Condorcet's paradox）。

延伸练习

1 **四人同场。**试做 STEP II 2015，第 12 题（step.maths.org/questions/15-s2-q12）：四名玩家同时参与的 Penney 游戏。

2 **等待时间。**证明直至 HH 首次出现的期望投掷次数是 6，而直至 HT 首次出现的则是 4。（使用首步分析。）

3 **最佳对策。**对于八个长度为三的序列，逐一找出以最大概率胜过它的序列。哪个序列最容易被击败？

4 **康威公式。**用康威公式验证 HHT 胜 HTT 的概率是 $\frac{2}{3}$。

延伸阅读

- **Martin Gardner, *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments***（W. H. Freeman）。书中包括 Penney 游戏和康威公式。
- **Ronald Graham, Donald Knuth & Oren Patashnik, *Concrete Mathematics***（Addison-Wesley），第 8.4 节。以生成函数（generating function）处理 Penney 游戏。
- **David Williams, *Probability with Martingales***（Cambridge University Press）。以鞅给出的证明，留待日后再读。

完整的引导式解答见第 12.8 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch12/penney.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com