12.7 淘汰赛中谁会遇上谁

工作纸

题目

STEP II Specimen paper，第 16 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/spec-s2-q16

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有停一停，试一试的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想** 有 2^n 名选手的淘汰赛（knockout tournament）共要进行多少场比赛？（每场比赛淘汰一名选手。）

阶段 1 第一轮

涵盖：第 (i) 部分

> **想一想** 在第一轮中，第一位选手的对手等可能地是其余任何一位选手。其余选手共有多少位？

阶段 2 关键的对称性

涵盖：第 (ii) 部分

想一想 每次抽签都是随机的，而每场比赛都相当于掷一次公平硬币。这个过程对待任何一对选手，会否与对待另一对选手有所不同？那么，就任何一场指定的比赛而言，对赛双方恰好是你那两位选手的概率（probability）是多少？

阶段 3 决赛

涵盖：第 (ii) 部分

停一停，试一试 决赛只是一场比赛，所以可以运用第二阶段的结果。第 r 轮共有 2^{n-r} 场比赛，而两位选手在同一轮中最多只能相遇一次：那么他们在第 r 轮相遇的概率是多少？

阶段 4 在任何阶段

涵盖：第 (iii) 部分

? **想一想** 他们最多只能相遇一次，所以各个“在第 r 轮相遇”的事件是互斥（mutually exclusive）的。把这些概率加起来，或者一次过计数全部 $2^n - 1$ 场比赛。

背后的数学

期望次数

第 4 阶段的论证其实是一个期望值（expectation）的计算：X 和 Y 相遇的次数是若干个指示变量（indicator）之和，每场比赛对应一个；而它的期望值（由于它只取 0 或 1，所以等于相遇的概率）就是各个指示变量的期望值之和。这就是期望值的线性性质（linearity of expectation），在 Section 9.11 和 Section 12.4 中都曾用到。它最大的好处是完全不必理会各轮之间错综复杂的相依关系。

设有种子的赛事

现实中的赛事设有种子（seeded）：最强的选手会被编排在适当的位置，使他们要到后段轮次才可能相遇。而且现实中的比赛也不是 50–50 的。这两点都破坏了对称性，于是计算两名指定选手相遇的机会便成了一项货真价实的运算。为体育运动建立模型的统计学家正是运用这类计算来预测赛事，当中每场比赛的概率都是根据选手的评分估计出来的。对称的情况则是一条基线，用来衡量各种现实因素的影响。

延伸练习

1 **逐轮计算。**直接证明 X 和 Y 在第 k 轮相遇的概率是 $\frac{2^{n-k}}{\binom{2^n}{2}}$，并验证这些概率加起来等于 $\frac{1}{2^{n-1}}$。

2 **固定的赛程表。**假如赛程表改为预先固定（如图所示），但所有选手都被随机编入其中，答案会否改变？

3 **一名强手。**假设选手 X 每场比赛都胜出。现在 X 与 Y 相遇的概率是多少？

4 **联赛。**在一个有 $2n$ 支球队的联赛中，每两队都对赛一次，共有多少场比赛？相应的“相遇概率”是甚么？

延伸阅读

- **Frederick Mosteller, *Fifty Challenging Problems in Probability***（Dover），书中收录了有关淘汰赛的问题。
- **David Spiegelhalter, *The Art of Statistics***（Pelican），讲述建立模型与预测。
- **Joseph Blitzstein & Jessica Hwang, *Introduction to Probability***（CRC Press；可于网上免费阅读），讲述指示变量与对称性。

完整的引导式解答见第 12.7 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch12/knockout.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com