12.6 多一枚硬币

工作纸

题目

STEP I 2016，第 12 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/16-s1-q12

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有*停一停，试一试*的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> ? **想一想** Alice 掷两次：她掷得正面的次数的分布（distribution）是甚么？掷三次的 Bob 又如何？

阶段 1 硬算

涵盖：第 (i) 及 (ii) 部分

> ? **想一想** 写出 Alice 和 Bob 各自掷得正面数目的分布（distribution）。按 Alice 掷得的正面数目分类，再把各情况相加。

阶段 2 拆开 Bob 的掷币

涵盖：第 (iii) 部分

> **停一停，试一试** 把 Bob 的 $n+1$ 次掷币看成先掷 n 次，再额外多掷一次。两人各掷 n 次之后，Bob 或是领先，或是打平，或是落后。在每种情况下，额外的那一掷会带来甚么影响？利用 Alice 与 Bob 之间的对称性（symmetry）。

背后的数学

对称与补事件

那个漂亮的证明结合了两个事实：在一个对称之下互换的两个事件概率相等，而两个互补事件的概率之和为 1。若两者同时成立，则每个事件的概率都是 $\frac{1}{2}$。同样的推理在概率论中随处可见。在航班座位问题（Section 12.5）中，S_1 与 S_n 在一个对称之下互换，而最后剩下的恰好是其中一个。在六贯棋（Hex）中，由棋盘的对称性，加上恰有一方必胜这个事实，可知先手一方占优，不过在大棋盘上无人知道必胜策略是甚么。

平手的可能性有多大？

当二人投掷次数相同时，平手的概率 p_1 就很重要。Alice 与 Bob 平手，即 Alice 的正面数目等于 Bob 的正面数目；利用对称性，把 Bob 的正面换成他的反面，这个概率就等于 Alice 的正面数目加上 Bob 的正面数目等于 n 的概率，亦即在 $2n$ 次投掷中共有 n 个正面。所以

$$p_1 = \binom{2n}{n}\frac{1}{4^n} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi n}},$$

这里用了斯特灵近似（Stirling's approximation）（Section 12.23）。平手会变得罕见，但变得很慢：各掷 100 次，平手的机会仍然约有 5.6%。

延伸练习

1 **多掷两枚硬币。**若 Bob 掷 $n+2$ 枚硬币而 Alice 掷 n 枚，证明 $\mathrm{P}(\text{Bob 的正面较多}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{P}(H' = H_A)$，其中 H' 是 Bob 头 $n+1$ 次投掷中的正面数目。

2 **不公平的硬币。**若二人所用的硬币掷出正面的概率都是 p，多掷一次时答案是否仍然是 $\frac{1}{2}$？那个漂亮的证明中哪一步不再成立？

3 **平手。**用正文中的技巧证明 $p_1 = \binom{2n}{n}/4^n$，并求它在 $n = 1, 2, 3$ 时的值。

4 **骰子。**Alice 掷 n 粒骰子，Bob 掷 $n+1$ 粒。Bob 掷得较多六点的概率是否等于 $\frac{1}{2}$？

延伸阅读

- **Peter Winkler, *Mathematical Mind-Benders***（A K Peters）。收录大量可用对称性解决的概率谜题。
- **Gabor Székely, *Paradoxes in Probability Theory and Mathematical Statistics***（Reidel）。
- **Frederick Mosteller, *Fifty Challenging Problems in Probability***（Dover）。

完整的引导式解答见第 12.6 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch12/one-more-coin.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com