12.5 最后一位乘客的座位

工作纸

题目

STEP II 2021，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2021 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有停一停，试一试的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **停一停，试一试** 列出所有可能发生的情况，求出 P_2 和 P_3。

阶段 1 递归关系（recurrence）

涵盖：第 (ii) 部分

停一停，试一试 假设 T_1 坐了 S_k，其中 $2 \le k \le n-1$。那么 $T_2, \ldots, T_{k-1}$ 会怎样做？当 T_k 到达时，哪些座位是空的？为甚么这与座位较少的原问题相同？

想一想 现在以 T_1 所选的座位为条件（condition on）来考虑，每个座位被选中的概率（probability）均为 $\frac{1}{n}$。

阶段 2 答案

涵盖：第 (iii) 部分

想一想 你已经知道 P_2 和 P_3。猜出 P_n，然后利用你的递归关系，以强归纳法（strong induction）证明。

阶段 3 **倒数第二位乘客**

涵盖：第 (iv) 部分

停一停，试一试 最后一位乘客可能剩下哪些座位？至于 T_{n-1}：只有当这位乘客的座位比 S_1 更早被选中时，这位乘客才会失去自己的座位。在被占去座位的乘客可以选择的座位之中，S_1、S_{n-1} 和 S_n 的地位是否相同？记得考虑 $n = 2$ 这个特殊情况。

背后的数学

对称论证

第二个证明体现了概率论中一个威力强大的想法：若两个结果可由随机过程的某种对称性互相对应，它们的概率就相同。这里的过程在 S_1 和 S_n 其中一个被选中之前，并不区分这两个座位，所以两者成为最后剩下的座位的可能性必定相等。对称论证往往只凭一个观察，就能取代冗长的计算。接下来的几节有很多这样的例子：Section 12.6 中多掷一次硬币，Section 12.7 中的淘汰赛抽签。

有多少位乘客被迫换位？

被迫换位的乘客（即坐不到自己座位的乘客）的数目同样有很好的规律。T_1 除非选中 S_1，否则就算是换了位；而 T_k（其中 $k \geq 2$）被迫换位的概率是 $\frac{1}{n-k+2}$。把这些概率相加，被迫换位的乘客数目的期望值（expected number）是

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{2}\right) = H_n - \frac{1}{n},$$

大约是 $\ln n$：即使飞机上有 300 个座位，这场混乱平均也只影响约六位乘客。调和数（harmonic numbers）又再出现了（Section 9.11）。

延伸练习

1 **两位健忘的乘客。**如果最先的两位乘客都随机选位，最后一位乘客坐到自己座位的概率是多少？

2 **被迫换位的乘客。**列出所有可能情况，验证 $n = 3$ 时被迫换位的乘客数目的期望值。

3 **迂回的路线。**利用递推关系，证明 $\sum_{r=2}^{n-1} P_r = \frac{n-2}{2}$ 与对称论证互相吻合。

4 **最后一个座位。**证明在最后一位乘客坐不到自己座位的条件下，最后一位乘客坐到 S_1 的概率是 1。为甚么？

延伸阅读

- **Peter Winkler, *Mathematical Puzzles: A Connoisseur's Collection***（A K Peters）。收录了飞机座位谜题，以及许多其他可用对称性解决的谜题。
- **Frederick Mosteller, *Fifty Challenging Problems in Probability***（Dover）。一本经典的题集。
- **Joseph Blitzstein & Jessica Hwang, *Introduction to Probability***（CRC Press；可于网上免费阅览）。

完整的引导式解答见第 12.5 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch12/airline-seat.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com