12.3 “随机”是甚么意思?

工作纸

题目

STEP III 2022，第 12 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2022 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷:

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有*停一停，试一试*的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想** 若角 AOB 为 θ，弦 AB 的长度是多少？（由 O 作垂线。）

阶段 1 圆上的两点

涵盖：第 (i) 部分

> **想一想** 若角 AOB 为 θ，从 O 作垂线（perpendicular）以求 AB。角 θ 在 $[0, 2\pi]$ 上均匀分布（uniform）：进行积分。

阶段 2 圆内的随机一点

涵盖：第 (ii) 部分，R 的密度

? **想一想** $\mathrm{P}(R \leq r)$ 是两个面积之比。求导即可得出密度（density）。

? **想一想** 一条通过 C 的弦（chord）与 OC 所成的角为 t。这条弦与 O 相距多远？那么它有多长？

阶段 3 对 C 取平均

涵盖：第 (ii) 部分，求 $\mathrm{L}(t)$

停一停，试一试 把弦长对 R 的密度积分，期间 $s = \sin t$ 保持不变。然后把 $1-\cos^3 t$ 和 $1-\cos^2 t$ 因式分解（factorise），并利用 $1+\cos t = 2\cos^2 \frac{t}{2}$。

阶段 4 方向也是随机的

涵盖：第 (iii) 部分

想一想 T 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上均匀分布。对 $\mathrm{L}(t)$ 的第二种形式积分。$\tan\frac{t}{2}$ 的导数（derivative）是甚么?

背后的数学

贝特朗的三个答案

贝特朗原本的问题是：一条随机弦比内接等边三角形的边长 $\sqrt{3}a$ 更长的概率是多少？他给出了三种方法和三个答案。

- 随机端点：固定一个端点；若另一个端点落在圆周中间的三分之一之内，弦便是长的。概率为 $\frac{1}{3}$。
- 随机取一条半径，再在其上随机取一点作为中点：若弦与 O 的距离小于 $\frac{a}{2}$，弦便是长的。概率为 $\frac{1}{2}$。
- 在圆盘内任意位置随机取中点：若中点与 O 的距离在 $\frac{a}{2}$ 之内，弦便是长的。概率为 $\frac{1}{4}$。

每一种方法都是弦的集合上一个不同的概率分布（probability distribution），当中并无矛盾：它们回答的是不同的问题。这里的教训是，“均匀随机”只有相对于某个选定的参数化（parametrisation）才有意义，而对于连续的集合，通常并没有唯一自然的参数化。

有没有正确答案?

1973 年，物理学家 Edwin Jaynes 主张第二种方法才是“正确”的，理由是把圆稍为移动或缩放，答案都不应改变：一条随机弦应该就像一根抛到地上所画圆圈上的饮管。只有与圆心距离均匀分布的那个分布才具有这种不变性（invariance），而抛饮管的实验也证实了 $\frac{1}{2}$。同一个想法，即正确的分布就是尊重情境中各种对称性的那一个，正是积分几何（integral geometry）的基础；积分几何是研究随机直线的数学，它也解释了 Section 12.20

中的布丰投针（Buffon's needle）。

从悖论到公理

贝特朗在 *Calcul des probabilités*（1889）中发表了他的弦悖论，部分原因是要嘲讽他眼中对“几何概率”的草率运用。庞加莱（Henri Poincaré）也讨论过它。1900 年，希尔伯特（David Hilbert）把概率的公理化（axiomatisation）列入他为新世纪提出的著名问题之中，而柯尔莫哥洛夫（Andrey Kolmogorov）在 1933 年解决了这个问题：概率是结果空间上的一个测度（measure），任何关于“随机”对象的问题，都必须先说明是哪一个空间、哪一个测度。贝特朗悖论正是说明为何必须如此的标准例子。

延伸练习

1 **贝特朗的概率。**验证上文的三个概率 $\frac{1}{3}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$。

2 **另一个平均值。**证明若弦的中点在圆盘内均匀选取（右边的图），期望长度是 $\frac{4a}{3}$。（提示：这就是 $L(\frac{\pi}{2})$。为甚么?）

3 **随机距离。**若弦与 O 的距离在 $[0, a]$ 上均匀分布，证明期望长度是 $\frac{\pi a}{2}$。

4 **三种方法，三个分布。**对三种方法中的每一种，求弦长 ℓ 在 $[0, 2a]$ 上的概率密度（probability density）。

延伸阅读

- **Edwin Jaynes, “The well-posed problem”**, *Foundations of Physics* 3 (1973)。不变性论证，易读而又发人深省。
- **Gábor Székely, *Paradoxes in Probability Theory and Mathematical Statistics*** (Reidel)。贝特朗悖论及其他许多悖论。
- **Daniel Klain & Gian-Carlo Rota, *Introduction to Geometric Probability*** (Cambridge University Press)。积分几何，留待日后研读。

完整的引导式解答见第 12.3 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch12/bertrand.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com