12.23 由概率得出斯特灵公式

工作纸

题目

STEP II 2016，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/16-s2-q13

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有*停一停，试一试*的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想** 设离散随机变量（discrete random variable）X 的平均值为 μ、方差（variance）为 σ^2，并且近似于正态分布，那么 $\mathrm{P}(X = \mu)$ 大约是多少？（试想一个宽度为 1、以 μ 为中心的区间的概率。）

阶段 1 十六枚硬币

涵盖：第 (i) 部分

> **想一想** 求 $\mathrm{B}(16, \frac{1}{2})$ 的平均值（mean）和标准差（standard deviation）。以正态密度函数（normal density）在峰顶处的高度来近似 $\mathrm{P}(X = 8)$。

阶段 2 中央二项式系数

涵盖：第 (ii) 部分

停一停，试一试 对于 $\mathrm{B}(2n, \frac{1}{2})$，写出 $\mathrm{P}(X = n)$ 的精确表达式，再用同样的方法写出它的近似式。令两者相等。

阶段 3 史特灵公式

涵盖：第 (iii) 部分

想一想 对参数（parameter）为 n 的泊松分布（Poisson distribution）照样做一次。它的平均值和方差（variance）分别是甚么？写出 $\mathrm{P}(X = n)$ 的精确表达式和近似式。

背后的数学

这个近似有多准确？

这个论证只是启发式（heuristic）的：它在*单独一点*上使用正态近似，而一般的中心极限定理（central limit theorem）并不足以支持这样做。它有一个严格的版本，称为*局部中心极限定理*（*local central limit theorem*），所做的正是这件事，并使这个论证成为真正的证明。斯特灵公式其实出奇地准确：比值 $\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n}$ 大约是 $1 + \frac{1}{12n}$，所以即使 $n = 1$，它给出的也是 0.92 而不是 1；而当 $n = 10$ 时，它只偏小了 0.8%。完整的级数（series）$1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \cdots$ 是*渐近级数*（*asymptotic series*）的一个例子：对于大的 n，它给出的近似值越来越好；但对于固定的 n，它最终会发散（diverge）。

阶乘与正态分布为何相连

斯特灵公式和正态密度中的 $\sqrt{2\pi}$ 是同一个常数，因为 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$。棣莫弗（Abraham de Moivre）在 1733 年正是循这条路找到二项分布的正态近似的：他需要在 n 很大时近似 $\binom{n}{k}$；他找到了 $n! \approx Cn^{n+1/2}e^{-n}$ 这个形式，却没有找到那个常数。斯特灵（James Stirling）证明了 $C = \sqrt{2\pi}$。正态分布是从阶乘的渐近性质中诞生的。

棣莫弗与斯特灵

棣莫弗是一位逃亡到伦敦的法国新教徒，靠当私人教师和为赌徒出谋献策维生。他在 1718 年出版了 *The Doctrine of Chances*（《机会论》），并在 1733 年的一本小册子中找到二项分布的正态近似，这是正态曲线首次面世。苏格兰数学家斯特灵在他的 *Methodus Differentialis*（1730）中发表了该常数的值，棣莫弗亦大方地把功劳归于他。阶乘的近似至今仍是活跃的课题：组合数学（combinatorics）和密码学（cryptography）都需要对极大的 n 计算 $n!$。

延伸练习

1 **检验公式。**用斯特灵公式估计 10! 和 20!,并与真确值 3 628 800 和 2 432 902 008 176 640 000 比较。

2 **由 (iii) 到 (ii)。**证明第 (iii) 部分的斯特灵公式可推出第 (ii) 部分的近似式。

3 **100! 的位数。**利用 $\log_{10} n! \approx n \log_{10} \frac{n}{e} + \frac{1}{2} \log_{10}(2\pi n)$ 证明 100! 有 158 位数字。

4 **掷硬币打成平手。**利用第 (ii) 部分，证明掷一枚公平硬币 1000 次而恰好得到 500 次正面的概率约为 0.025。

延伸阅读

- **William Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 1**（Wiley），第 II 章，当中证明了斯特灵公式。
- **Ronald Graham, Donald Knuth & Oren Patashnik, *Concrete Mathematics***（Addison-Wesley），第 9 章，讲述渐近分析。
- **Stephen Stigler, *The History of Statistics***（Harvard University Press），讲述棣莫弗与正态曲线的诞生。

完整的引导式解答见第 12.23 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch12/stirling-probability.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com