12.21 折断一根棒

工作纸

题目

STEP III 1990，第 16 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/90-s3-q16

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停”或“试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想** 三个长度能组成三角形，当且仅当每一个都小于其余两个之和。如果三个长度之和为 L，这对最长的一个有何含意？边 c 所对的角何时是钝角？

阶段 1 先切一刀，再对半分

涵盖：第 (i) 部分

想一想 三段长度之和为 1，它们能组成三角形，当且仅当每一段都小于 $\frac{1}{2}$。这对 X 有甚么要求？

停一停，试一试 这个三角形是等腰（isosceles）三角形。X 所对的角何时是钝角（obtuse angle）？用余弦定理（cosine rule）。在能组成三角形的条件下，X 在 $[0, \frac{1}{2}]$ 上服从均匀分布（uniform distribution）。

阶段 2 第二种构造

涵盖：第 (ii) 部分：构造与条件

想一想 在所给区域上，检验边长为 x、y 和 $2-x-y$ 时的三条三角不等式（triangle inequalities）。

想一想 B 处的角所对的边长为 y。把这个角是钝角的条件写成关于 y 的不等式。

阶段 3 **面积**

涵盖：第 (ii) 部分：概率

> **停一停，试一试** 把 $x^2 - 2x + 2$ 除以 $2 - x$。求出区域中位于曲线上方那部分的面积，再除以整个区域的面积。

背后的数学

经典的折棒问题

在两个独立而均匀分布的点 U 和 V 处把木棒折断。数对 (U, V) 在单位正方形上均匀分布，而三段能组成三角形，正正是当每一段都短于 $\frac{1}{2}$：这个条件切去四个小三角形，总面积为 $\frac{3}{4}$，余下的概率是 $\frac{1}{4}$。已知能组成三角形时，它是锐角三角形的概率是 $\frac{1}{4}$ 当中的 $3\ln 2 - 2 \approx 0.079$，即大约 32%。这三段木棒是*均匀随机分割*（uniform random partition）的一个例子，它们的联合分布（joint distribution）是*狄利克雷分布*（Dirichlet distribution），这种分布出现在贝叶斯统计学（Bayesian statistics）中，也出现在描述资源如何随机分配的模型中。

怎样折断木棒，大有关系

请留意，题目中的两种方法，对听起来相似的问题给出了不同的答案 $3 - 2\sqrt{2}$ 和 $3 - 4\ln 2$，而两者又都与经典方法的答案不同。正如贝特朗（Bertrand）的弦（Section 12.3）一样，在指明具体程序之前，“随机”一词毫无意义。

随机三角形

关于随机三角形的问题，是维多利亚时代流行的趣题。路易斯·卡罗（Lewis Carroll）的 *Pillow Problems*（1893 年）问及“随机”选取的三角形是钝角三角形的概率，而他的答案，正如本节的答案一样，完全取决于他所选择的随机性模型。关于随机三角形的问题

一直带来惊喜：例如，在正方形内均匀随机选取三点，它们组成钝角三角形的概率约为 0.725，这个数值到二十世纪才有人准确算出。

延伸练习

1 **经典问题。**证明：若在两个独立而均匀分布的点处把木棒折断，则各段能组成三角形的概率是 $\frac{1}{4}$。

2 **折断较长的一段。**在一个均匀分布的点处把木棒折断，然后在较长的一段上取一个均匀分布的点，再把它折断。证明三段能组成三角形的概率是 $2\ln 2 - 1 \approx 0.386$。

3 **锐角还是钝角。**在第 (ii) 部分中，求三角形 ABC 在 C 处（对边为 $AB = 2 - x - y$）有钝角的概率。由此求它有任何一个角是钝角的概率。

4 **最长一段的期望长度。**对于经典的折棒问题，证明最长一段的期望（expected）长度是 $\frac{11}{18}$。

延伸阅读

- **Martin Gardner, *The Colossal Book of Mathematics***（Norton），书中收录了折棒问题。
- **Frederick Mosteller, *Fifty Challenging Problems in Probability***（Dover）。
- **Lewis Carroll, *Pillow Problems***（Dover，与 *A Tangled Tale* 合订）。维多利亚时代的趣题，包括随机三角形。

完整的引导式解答见第 12.21 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch12/broken-stick.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com