12.20 蒲丰投针

工作纸

题目

STEP I 1993，第 16 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s1-q16

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有停一停，试一试的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

想一想 针的中心与最近一条直线的距离为 x，而针与这些直线的垂直线所成的角为 y。针朝着该直线能伸展多远？

阶段 1 积分

涵盖：积分

想一想 在 $\int_0^1 \cos^{-1} t \, \mathrm{d}t$ 中作代换（substitution）$t = \cos y$，然后使用分部积分法（integration by parts）。

阶段 2 给定位置

涵盖：已知 $X = x$ 时的概率

停一停，试一试 针的中心与最近的直线相距 x，而针与垂直线（perpendicular）所成的角为 y。针向着该直线的方向伸展多远？对于固定的 x，哪些 y 值会使针与直线相交？

阶段 3 对位置取平均

涵盖：一般投掷的概率

> **想一想** X 在 $[0, b]$ 上服从均匀分布（uniform distribution）。把你求得的条件概率（conditional probability）对其密度（density）积分，再代入 $x = at$ 以利用第一个积分。

背后的数学

布丰的面条

以下的方法几乎不用计算就能看出答案。把针屈曲成任意形状，成为一根“面条”，并设 C 为它与直线相交的次数。根据期望值的线性（linearity of expectation），一条曲线相交次数的期望值，等于它各小段的期望值之和，所以与长度成正比：$\mathrm{E}(C) = \kappa L$，其中 κ 是某个常数。要求出 κ，可取面条为一个直径等于直线间距 $2b$ 的圆：它总是恰好相交两次，而其长度为 $2\pi b$。所以 $\kappa \cdot 2\pi b = 2$，得出 $\kappa = \frac{1}{\pi b}$。对于长度为 $2a < 2b$ 的直针，它最多相交一次，故 $\mathrm{P}(\text{相交}) = \mathrm{E}(C) = \frac{2a}{\pi b}$。这个论证出自 Joseph-Émile Barbier（1860 年），是概率推理中的瑰宝：那个 π 来自用来校准常数的圆。

估算 π，以及错误示范

若抛出 n 根针，其中 c 根相交，则 $\frac{c}{n} \approx \frac{2a}{\pi b}$，而 $\pi \approx \frac{2an}{bc}$。误差只会按 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 的速度缩小，所以要把 π 算至小数点后三位，大约需要抛一百万次。1901 年，意大利数学家 Mario Lazzarini 声称抛了 3408 次便得出 $\pi \approx \frac{355}{113} = 3.1415929\ldots$（准确至小数点后六位）。统计学家指出，这个结果好得令人难以置信：抛 3408 次，再配合一根精心挑选的针，恰好 1808 次相交便会得出 $\frac{355}{113}$，而只要在适当的时刻停止实验，就能制造出这个结果。这是关于选择性报告的经典警世故事。

布丰

布丰是一位博物学家，曾任巴黎皇家植物园园长，并著有一套 36 卷的自然史。他于 1733 年向法国科学院（Académie des Sciences）提出投针问题（以及一个使用方形地砖的版本，即“franc-carreau”游戏），并于 1777 年发表解答。他的目的是要说明，概率中不单可以运用算术，也可以运用几何。积分几何（integral geometry）——研究随机直线及其与曲线和曲面的交点的理论——正是由此发展而来，如今应用于体视学（stereology），即从二维切片估算三维结构（例如组织中的细胞）的大小和形状的科学。

延伸练习

1 **长针。**若 $a > b$，针可能与多于一条直线相交。证明相交次数的期望值仍然是 $\frac{2a}{\pi b}$。

2 **面条。**把一根长度为 $2a$ 的针屈成直角（两臂各长 a）。相交次数的期望值是多少？

3 **方形地砖。**把一枚半径为 r 的硬币抛到铺有边长为 $s > 2r$ 的方形地砖的地板上。求硬币完全落在一块地砖之内的概率。

4 **Lazzarini 的针。**设 $a = \frac{5}{6}b$（使得 $\frac{2a}{\pi b} = \frac{5}{3\pi}$），证明抛 3408 次而有 1808 次相交，会给出估算值 $\pi \approx \frac{355}{113}$。

延伸阅读

- **Daniel Klain & Gian-Carlo Rota,** ***Introduction to Geometric Probability*** （Cambridge University Press），此书由布丰投针问题讲起。
- **Lee Badger, “Lazzarini’s lucky approximation of** π**”，** *Mathematics Magazine* 67 (1994)。一个可疑实验背后的统计学。
- **Paul Nahin,** ***Digital Dice*** （Princeton University Press）。以蒙地卡罗方法处理概率问题。

完整的引导式解答见第 12.20 节：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch12/buffon.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com