12.2 基本比率谬误

工作纸

题目

STEP II 1998，第 12 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/98-s2-q12

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有停一停，试一试的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

想一想 试想像有 1000 人。当中有多少人患病？这些患者之中有多少人检测呈阳性？健康的人之中又有多少人检测呈阳性？

阶段 1 贝叶斯定理（Bayes' theorem）

涵盖：Frankie 的概率

想一想 设想有 1000 人。当中有多少人患病？这些患者之中又有多少人检测呈阳性？有多少健康的人检测呈阳性？

停一停，试一试 写出 $\mathrm{P}(D \mid +) = \frac{\mathrm{P}(D \cap +)}{\mathrm{P}(+)}$，再按 Frankie 是否患病把 $\mathrm{P}(+)$ 拆开。

阶段 2 **第二次检测**

涵盖：求 p

想一想 第二次检测只施于在 AL 检测中呈阳性的人。这群人当中，患者占多少？以此作为贝叶斯定理中新的起始概率，并令答案等于 $\frac{1}{2}$。

背后的数学

胜算与证据

以*胜算*（odds）来表达，贝叶斯定理最为清晰。D 的胜算是 $\mathrm{P}(D) : \mathrm{P}(\bar{D})$。一项证据 E 会把胜算乘以*似然比*（likelihood ratio）$\frac{\mathrm{P}(E|D)}{\mathrm{P}(E|\bar{D})}$：

$$\text{后验胜算} = \text{先验胜算} \times \text{似然比}.$$

这里的先验胜算是 $1 : 99$，而 AL 的似然比是 $0.9 \div \frac{1}{11} = 9.9$，于是后验胜算为 $9.9 : 99 = 1 : 10$，即概率为 $\frac{1}{11}$。第二项独立检测的似然比若为 10（$p = 0.09$ 时的 STEP 正是如此），便会把胜算带到 $1 : 1$。取对数之后，证据就可以*相加*：每项独立检测所贡献的，是其似然比的对数。图灵（Alan Turing）在布莱切利园（Bletchley Park）破解恩尼格玛（Enigma）密码电文时，用的正是这个方法，并以“ban”和“deciban”作为量度证据的单位。

检控官谬误

1999 年，事务律师 Sally Clark 被裁定谋杀两名年幼儿子罪名成立，定罪的部分依据是一项证据，指同一家庭发生两宗婴儿猝死的机会是“7300 万分之一”。姑且不论这个数字本身有错（它假设两宗死亡互相独立，忽略了遗传和环境因素），这个推论还把 P(证据 | 无辜) 与 P(无辜 | 证据) 混为一谈。母亲连杀两子同样极为罕见，真正应该比较的是这两种解释。皇家统计学会（Royal Statistical Society）发表公开信指出这个错误，她的定罪于 2003 年获撤销。当中的数学与本题完全相同。

Gigerenzer 与自然频率

在 1990 年代，心理学家 Gerd Gigerenzer 指出，医生若获得以条件概率表达的检测统计数字，遇到本题这类问题时大多错得离谱；但同样的资料若以自然频率表达（“在 1000 名女性当中，有 10 人患乳癌；其中 8 人检测呈阳性…”），大多数医生都能答对。他的研究改变了许多国家向病人传达医疗风险的方式。

延伸练习

1 **雪柜里的尸体。**试做 STEP II 1987，第 16 题（step.maths.org/questions/87-s2-q16）：贝叶斯定理应用于两名可靠程度不同的证人，是 STEP 中较令人难忘的题目情境之一。

2 **要多罕见？**某项检测的灵敏度（sensitivity）为 0.9，假阳性率为 $\frac{1}{11}$。疾病要有多普遍，阳性结果才表示患病的机会高于一半？

3 **重复检测。**假如重复进行 AL 检测，而在已知受测者真实状况的条件下各次结果互相独立，那么两次 AL 检测均呈阳性后，患病的概率是多少？三次之后呢？

4 **筛查。**某项筛查计划为一百万人检测某种病症，其患病率（prevalence）为 10 000 分之 1，所用检测的灵敏度为 99%，假阳性率为 1%。有多少人会被告知可能患有此病症？当中又有多少人真的患病？

延伸阅读

- **Gerd Gigerenzer, *Reckoning with Risk***（Penguin）。自然频率、医学检测与法庭。
- **David Spiegelhalter, *The Art of Statistics***（Pelican）。内容包括医学筛查和 Sally Clark 案。
- **Sharon Bertsch McGrayne, *The Theory That Would Not Die***（Yale University Press）。贝叶斯定理的历史，包括图灵如何运用这个定理。

完整的引导式解答见第 12.2 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch12/base-rate.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com