12.19 平面上的随机点

工作纸

题目

STEP II 2012，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/12-s2-q13

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有停一停，试一试的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想** 一个平均值为 μ 的泊松随机变量（Poisson random variable），取值 0 的概率是多少？

阶段 1 附近没有超级市场

涵盖：圆内没有超级市场

> **想一想** 半径为 y 的圆内的超级市场数目服从泊松分布（Poisson distribution）。它的平均值（mean）是多少？它等于 0 的概率是多少？

阶段 2 最近距离的分布

涵盖：Y 的分布

停一停，试一试 $Y \geq y$ 表示在距离 y 之内没有超级市场。那么 $\mathrm{P}(Y < y)$ 是多少？求导（differentiate）便可得到概率密度函数（density）。

阶段 3 平均值

涵盖：平均值

想一想 把 $\mathrm{E}(Y)$ 写成积分。作代换（substitution），使指数变成 $-\frac{1}{2}x^2$，然后利用题目给出的积分。

阶段 4 方差

涵盖：方差

想一想 计算 $\mathrm{E}(Y^2)$ 时，被积函数（integrand）中 y 的幂次是奇数，所以代入 $u = \pi k y^2$。然后利用 $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(Y^2) - \big(\mathrm{E}(Y)\big)^2$ 求方差（variance）。

背后的数学

平面上的泊松过程

强度（intensity）为 k 的空间泊松过程，是一种随机散布的点集，满足：互不相交的区域内的点数彼此独立，而面积为 A 的区域内的点数服从平均值为 kA 的泊松分布。把极大量的点独立而均匀地投放到一片极大的区域上，并保持适当的平均密度，得到的就是这种过程：这正是“稀有事件定律”（law of rare events），它同样解释了错排（derangement）的现象（Section 9.8）。它是完全空间随机性（complete spatial randomness）的自然模型，实际的分布形态都以它为比较标准。*Clark–Evans 检验*（*Clark–Evans test*）由两位生态学家于 1954 年提出，把观察所得的平均最近邻距离与 $\frac{1}{2\sqrt{k}}$ 比较：小得多表示有聚集现象（种子落在母树附近），大得多则表示间隔规则（有领域行为的鸟类，或植物之间争夺水分）。

三维的情况

在三维空间中作同样的计算，可得到最近的恒星、分子或星系的距离满足 $\mathrm{P}(Y > y) = e^{-\frac{4}{3}\pi k y^3}$。钱德拉塞卡（Subrahmanyan Chandrasekhar）在 1943 年用它来研究一颗恒星受随机分布的邻近恒星所施的引力，物理学家则用它来计算气体分子的平均自由程（mean free path）。

瑞利

密度函数 $\frac{y}{\sigma^2}e^{-y^2/(2\sigma^2)}$ 以瑞利勋爵（Lord Rayleigh）命名，他在 1880 年研究声学理论时遇上它：它描述了许多相位随机的波叠加后的振幅。若一点的两个坐标是独立的正态随机变量（normal random variable），它也给出该点与原点距离的分布，这是理解它为何在这里出现的另一个角度（练习 3）。今天，它用来模拟流动电话信号的衰落，因为信号是沿着许多相位随机的路径到达接收器的。

延伸练习

1 **中位数。**求到最近超级市场的距离的中位数（median），并与平均值比较。

2 **第二近的。**求到第二近的超级市场的距离的分布。（提示：$\mathrm{P}(Y_2 > y)$ 是在 y 以内最多只有一间超级市场的概率。）

3 **正态坐标。**若 U 和 V 是独立的 $\mathrm{N}(0, \sigma^2)$ 随机变量，证明 $\sqrt{U^2+V^2}$ 的密度函数为 $\frac{r}{\sigma^2}e^{-r^2/(2\sigma^2)}$。$\sigma$ 取何值时会得到超级市场的分布？

4 **Clark–Evans。**在一项调查中，一片面积 1 km^2 的树林内有 400 棵树，而一棵树到其最近邻的平均距离为 35 m。这与完全空间随机性相符吗？还是显示有聚集或间隔的现象？

延伸阅读

- **Peter Diggle, *Statistical Analysis of Spatial Point Patterns***（Arnold）。这方面的标准参考书，载有 Clark–Evans 检验及其后续发展的方法。
- **John Kingman, *Poisson Processes***（Oxford University Press）。一本优美的短篇著作，讨论任意维数的泊松过程。
- **Geoffrey Grimmett & David Stirzaker, *Probability and Random Processes***（Oxford University Press），论泊松过程的一章。

完整的引导式解答见第 12.19 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch12/spatial-poisson.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com