12.18 无记忆性

工作纸

题目

STEP III 2021，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2021 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有停一停，试一试的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想** 对于 $x \geq 0$，$\mathrm{P}(X > x)$ 是甚么？$\mathrm{P}(X > s + t \mid X > s)$ 又是甚么？

阶段 1 整数部分

涵盖：第 (i) 部分

> **想一想** $Y = n$ 当且仅当 $n \leq X < n + 1$。$\mathrm{P}(X > x)$ 是甚么？

阶段 2 小数部分

涵盖：第 (ii) 部分

> **停一停，试一试** $Z < z$ 表示 X 落在其中一个区间 $[n, n+z)$ 内。把这些区间的概率加起来，就得到一个等比级数（geometric series）。

阶段 3 Z 的平均值

涵盖：第 (iii) 部分

> **想一想** 可以对第 (ii) 部分的结果求导，得出 Z 的概率密度函数（density），再把它乘以 z 后积分；也可以利用 $\mathrm{E}(Z) = \int_0^1 \mathrm{P}(Z > z)\,\mathrm{d}z$。

阶段 4　独立性

涵盖：第 (iv) 部分

> **想一想**　把 $\mathrm{P}(Y = n \text{ 且} z_1 < Z < z_2)$ 写成一个关于 X 的概率，再与第 (i) 及第 (ii) 部分答案的乘积比较。

背后的数学

指数分布为何特别

Y 与 Z 的独立性直接来自 $e^{-\lambda(n+z)} = e^{-\lambda n}e^{-\lambda z}$，而这正是无记忆性质的另一副面貌。事实上，指数分布是唯一没有记忆的连续分布：若对所有 $s, t \geq 0$ 都有 $\mathrm{P}(X > s+t) = \mathrm{P}(X > s)\mathrm{P}(X > t)$，则 $g(t) = \ln \mathrm{P}(X > t)$ 满足 $g(s+t) = g(s) + g(t)$，而（对于单调（monotonic）的 g）这就迫使 $g(t) = -\lambda t$。正因如此，指数分布可用来描述那些“随机”发生、没有任何累积过程的事件的等候时间：放射性衰变、顾客的到达、不会损耗的电子元件的故障。

最小值与等候时间悖论

若 X_1 与 X_2 是独立的指数随机变量，率分别为 λ_1 和 λ_2，则 $\mathrm{P}(\min > x) = e^{-\lambda_1 x}e^{-\lambda_2 x}$，所以最小值服从率为 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的指数分布。等候两个独立随机事件中最先发生的一个，就如同以合并后的率等候单一事件（STEP III 2002 Q13，见练习）。无记忆性也解释了*等候时间悖论*（*waiting-time paradox*）：若巴士随机到站，平均间隔为 10 分钟，则一位在随机时刻到达的乘客平均要等 10 分钟，而不是 5 分钟，因为余下的等候时间是无记忆的；而乘客到达时所处的那个间隔，平均长达 20 分钟，因为较长的间隔更容易被碰上。

卢瑟福（Rutherford）与泊松过程（Poisson process）

1910 年，欧内斯特·卢瑟福与汉斯·盖革（Hans Geiger）以 7.5 秒为一个时段，数算一个放射源所放出的阿尔法粒子（alpha particles），发现这些计数服从泊松分布（Poisson distribution）；数学家 Harry Bateman 证明了，只要各次放射以恒定的率独立发生，结果就理应如此。这样一来，相邻两次放射之间的时间便服从指数分布。*泊松过程*，即间隔服从指数分布的一连串事件，如今已成为描述时间上随机性的基本模型，应用于电话通话、保险索偿以及神经元的放电；下一节 Section 12.19 会把它推广到空间。

延伸练习

1 **两条巴士路线。**试做 STEP III 2002，第 13 题（step.maths.org/questions/02-s3-q13）。这道题利用两个指数随机变量的最小值，求出等候下一班巴士的时间。

2 **离散的无记忆性。**证明几何分布是无记忆的：$\mathrm{P}(Y \geq m+n \mid Y \geq m) = \mathrm{P}(Y \geq n)$。

3 **等候时间悖论。**巴士的到站是一个率为 λ 的泊松过程。证明包含某固定时刻 t（t 很大）的那个间隔，其期望长度为 $\frac{2}{\lambda}$，即平均间隔的两倍。

4 **Z 的密度。**求 Z 的概率密度（probability density），并就 $\lambda = 1$ 和 $\lambda = 5$ 绘出其草图。

延伸阅读

- **Geoffrey Grimmett & Dominic Welsh, *Probability: An Introduction***（Oxford University Press），论及指数分布与泊松过程。
- **Sheldon Ross, *Introduction to Probability Models***（Academic Press）。指数分布、泊松过程与排队。
- **David Spiegelhalter, *The Art of Uncertainty***（Pelican）。日常生活中的随机性与等候。

完整的引导式解答见第 12.18 节：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch12/memoryless.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com