12.17 巴拿赫的火柴盒

工作纸

题目

STEP II 1992，第 16 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/92-s2-q16

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有停一停，试一试的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

想一想 若司机在第 N 次伸手时发现太妃糖已经吃完，第 N 次伸手必须是甚么？之前的 $N-1$ 次伸手又必须包含甚么？

阶段 1 发现太妃糖已经吃完

涵盖：T 的概率

想一想 若她在第 N 次伸手时才发现太妃糖已经吃完，这一次伸手是要拿甚么？之前的 $N-1$ 次伸手必须包含甚么？

停一停，试一试 之前各次伸手可以有多少种不同的次序？已取薄荷糖的数目须符合甚么条件，才能确保她没有先发现薄荷糖已经吃完？

阶段 2 发现薄荷糖已经吃完

涵盖：M 的概率

> **想一想** 把太妃糖与薄荷糖的角色对调，重复同样的论证。

阶段 3 条件概率（conditional probability）

涵盖：答案

> **想一想** 这两种发现不可能在同一次伸手时同时发生。已知她在第 N 次伸手时有所发现，发现的是太妃糖吃完的概率是多少？

背后的数学

巴拿赫的火柴盒

在巴拿赫的版本中，每盒起初有 n 根火柴，选中每个口袋的机会均等。当他首次发现其中一盒空了，设 K 为另一盒的火柴数目。若 $K = k$，他必定已从空的那盒取了 n 根，从另一盒取了 $n - k$ 根，次序不拘，然后再一次伸手去拿空的那盒；而两盒之中任何一盒都可以是空的那盒：

$$\mathrm{P}(K = k) = 2\binom{2n-k}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k+1} = \binom{2n-k}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}.$$

这些概率随 k 增大而递减，唯一例外是 $\mathrm{P}(K=0)=\mathrm{P}(K=1)$（图 12.17.1）。剩余火柴数目的期望值（expected value）约为 $2\sqrt{n/\pi}-1$：若每盒有 50 根火柴，约为 7。这个 $\sqrt{n}$ 是经过 $2n$ 次随机选择之后，两盒之间差距的典型大小，与生日问题（Section 9.9）和随机漫步（random walk）中的平方根定律如出一辙。

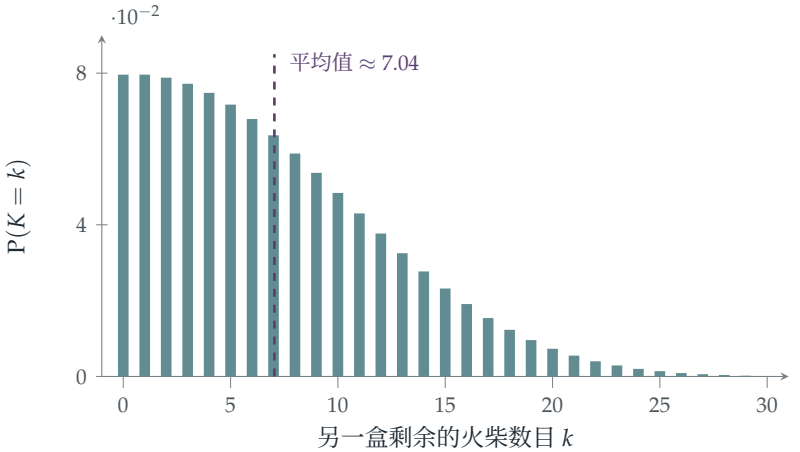

图 12.17.1 每盒有 50 根火柴的巴拿赫火柴盒问题：首次发现其中一盒空了的时候，另一盒剩余火柴数目的分布。最可能的数值是 0 和 1，两者概率相同，但平均值约为 7。

负二项分布

在一连串独立试验（independent trials）中，每次试验成功的概率为 p，则取得第 r 次成功所需的试验次数服从*负二项分布*（negative binomial distribution）：$\mathrm{P}(N=k)=\binom{k-1}{r-1}p^r q^{k-r}$。的士司机的问题，是两个负二项过程（太妃糖和薄荷糖）之间的竞赛，每个过程所需的“成功”次数都比该包糖的数目多一次。负二项分布见于保险（索偿宗数）、生态学（动物聚集分布的数目）和遗传学，往往用来代替泊松分布（Poisson distribution），因为它更有弹性。

巴拿赫与苏格兰咖啡馆

巴拿赫是泛函分析（functional analysis）的奠基人之一，他的数学研究有不少是在 Lwów（今称 Lviv）的苏格兰咖啡馆（Scottish Café）里完成的。他和同事把问题写在一本由侍应保管的笔记簿上，这就是《*苏格兰书*》（Scottish Book），解题奖品从一杯啤酒到一只活鹅不等。斯坦豪斯是巴拿赫的恩师，他为了一篇向巴拿赫的吸烟习惯致意的演说，设计了这道火柴盒问题。最先在书刊中分析这个问题的，是费勒（William Feller）1950 年出版的著名概率论教科书。

延伸练习

1 **小规模情况。**设 $n = m = 1$ 及 $p = \frac{1}{2}$，列出所有可能的序列，并求 N 的分布。

2 **巴拿赫公式。**对 $n = 1$ 和 $n = 2$，验证 $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n-k}{n} 2^{-(2n-k)} = 1$。

3 **并列最高。**证明在巴拿赫问题中，对每一个 n 都有 $\mathrm{P}(K = 0) = \mathrm{P}(K = 1)$。

4 **哪一包先吃完？**就的士司机的问题，当 $n = m = 2$ 及 $p = \frac{2}{3}$ 时，求太妃糖是首先被发现空了的那一包（不论何时发现）的概率。

延伸阅读

- **William Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 1**（Wiley），第 VI 章，正是这本书把巴拿赫问题介绍给全世界。
- **R. Daniel Mauldin (ed.), *The Scottish Book***（Birkhäuser）。收录苏格兰咖啡馆的问题，并附评注。
- **Geoffrey Grimmett & Dominic Welsh, *Probability: An Introduction***（Oxford University Press），内容涉及负二项分布。

完整的引导式解答见第 12.17 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch12/matchboxes.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com