12.16 顺向与逆向的马可夫链

工作纸

题目

STEP III 1996，第 12 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/96-s3-q12

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有停一停，试一试的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想** “每一行（row）之和为 1”这个条件是甚么意思？各列（column）之和是否也是 1？

阶段 1 一步转移

涵盖：第 (i) 部分

> **想一想** 以当前定理的类型作为条件，再运用全概率定律（law of total probability）。

阶段 2 平稳分布（stationary distribution）

涵盖：第 (ii) 部分

> **停一停，试一试** 对 $j=1,2,3$ 写出 $a_j = a_1 p_{1j} + a_2 p_{2j} + a_3 p_{3j}$，并有 $a_1 + a_2 + a_3 = 1$。从哪一条方程入手最简单？

阶段 3 把链倒过来运行

涵盖：第 (iii) 部分

? **想一想** q_{ij} 是在已知这条定理属于类型 j 的条件下，前一条定理属于类型 i 的概率。运用贝叶斯定理（Bayes' theorem），两条定理的分布都采用你在第 (ii) 部分得到的答案。

背后的数学

收敛至平衡

让 Ecks 教授从任何一个定理开始；再证明 n 个之后，类型的分布是 $\mathbf{a}_0 P^n$。对于像这样的一条链，即每种类型都可以紧接在任何一种类型之后，不论起点为何，P^n 都会收敛至一个每一行均等于平稳分布 $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ 的矩阵。收敛的速度由 P 的其他特征值（这里是 0.2 和 0.1）决定，它们以几何方式缩小：只需几个定理之后，她的过去就被遗忘了。这个关于马可夫链的*遍历定理*（*ergodic theorem*）是大学二年级概率课程的核心结果，马可夫链蒙地卡罗（Markov chain Monte Carlo）方法之所以行得通，靠的正是它：要从一个复杂的分布中抽样，就设计一条以该分布为平稳分布的马可夫链，然后让它运行一段长时间。

可逆性

逆向链 (q_{ij}) 与正向链 (p_{ij}) 并不相同：从她的定理的一份长纪录中，你可以分辨出时间的方向。若一条链的逆向版本与正向版本一致，即对所有 i、j 都有 $a_i p_{ij} = a_j p_{ji}$，就称为*可逆*（*reversible*）；网络上的随机游走（random walk）以及处于热平衡的物理系统的模型都属此类。可逆性是一个威力强大的性质，因为它令平稳分布很容易求出。

马可夫与普希金

马可夫（Andrey Markov）在 1906 年引入他的链，部分原因是要证明大数定律（law of large numbers）并不需要独立性；当时他正与数学家 Pavel Nekrasov 争论，后者声称独立性是必需的。1913 年，马可夫把他的想法应用于普希金（Pushkin）的诗体小说《叶甫盖尼·奥涅金》（*Eugene Onegin*）的首 20 000 个字母，把每个字母分为元音或辅音，并证明每个字母的类型取决于前一个字母的类型，而这种关系可用一条两个状态的链很好地描述。这是史上第一次对文本作统计分析，也是所有预测输入系统的始祖。

延伸练习

1 **兔子窝。**试做 STEP III 2003，第 13 题（step.maths.org/questions/03-s3-q13）：在一个正方形的四个顶点上的随机游走，每个顶点各有一个出口，以首步方程求解。

2 **两步。**若 Ecks 教授上一个定理是新而正确的，求再下一个定理属于三种类型的概率。

3 **特征值。**证明 P 的特征值为 1、0.2 和 0.1。

4 **可逆吗？**检查 Ecks 教授的链是否满足 $a_i p_{ij} = a_j p_{ji}$。答案告诉你甚么？

延伸阅读

- **James Norris, *Markov Chains***（Cambridge University Press）。标准的大学本科教科书。
- **Olle Häggström, *Finite Markov Chains and Algorithmic Applications***（Cambridge University Press）。篇幅短小，讲马可夫链蒙地卡罗尤其出色。
- **Brian Hayes, “First links in the Markov chain”**，*American Scientist* 101 (2013)。重述马可夫对普希金作品的分析。

完整的引导式解答见第 12.16 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch12/markov.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com