12.15 灭绝还是爆发

工作纸

题目

STEP II 2003，第 12 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/03-s2-q12

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有停一停，试一试的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

想一想 如果某一阶段有两个粒子，下一阶段粒子数目的分布是甚么?

阶段 1 先是两个，再是两个

涵盖：联合概率（joint probability）

想一想 $\mathrm{P}(X_1 = 2)$ 是多少?若有两个粒子,下一代粒子数目的分布(distribution)是甚么?

阶段 2 逆向推理

涵盖：条件概率（conditional probability）

停一停，试一试 按 X_1 的取值分情况，求出 $\mathrm{P}(X_2 = 2)$。然后运用条件概率的定义，并令答案等于 $\frac{9}{25}$。

阶段 3 种群数目的期望

涵盖：期望值（expectation）与极限（limit）

> **想一想** 若某一代有 k 个粒子，下一代粒子数目的期望值是多少？对 k 取平均，然后解出 $\mathrm{E}(X_n)$ 的递推关系（recurrence）。

背后的数学

灭绝的概率

当 $p = \frac{3}{4}$ 时，粒子总数的期望值无止境地增长。这是否表示群体一定能存活下去？不一定：如果第一个粒子没有后代（概率为 $q^2 = \frac{1}{16}$），这个族系便立即终结。设 e 为最终灭绝的概率。第一个粒子有 k 个后代，而每个后代的族系各自独立地以概率 e 灭绝，所以

$$e = q^2 + 2pq\,e + p^2e^2 = (q + pe)^2 = \mathrm{G}(e),$$

其中 $\mathrm{G}(s) = (q + ps)^2$ 是后代数目的概率生成函数（probability generating function）。灭绝概率是 G 的一个不动点：事实上是最小的非负不动点。当 $p = \frac{3}{4}$ 时，由 $(1 + 3e)^2 = 16e$ 得 $9e^2 - 10e + 1 = 0$，所以 $e = \frac{1}{9}$ 或 1，而灭绝概率是 $\frac{1}{9}$。当 $p = \frac{1}{4}$ 时，在 $[0, 1]$ 内唯一的不动点是 $e = 1$：灭绝是必然的（图 12.15.1）。

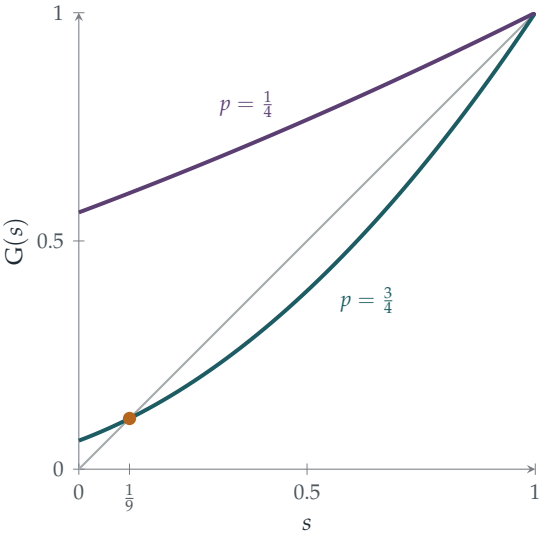

图 12.15.1 后代数目的生成函数 $G(s) = (q + ps)^2$ 与直线 $y = s$。灭绝概率就是两者相交的最小一点。当 $p = \frac{1}{4}$（紫红色，平均值 $\frac{1}{2}$）时，该点是 $s = 1$：灭绝是必然的。当 $p = \frac{3}{4}$（蓝绿色，平均值 $\frac{3}{2}$）时，该点是 $s = \frac{1}{9}$（琥珀色）：群体以概率 $\frac{8}{9}$ 永远存活下去。

临界门槛

一般而言，如果后代数目的平均值小于 1，分支过程必然灭绝；平均值等于 1 时也是如此，唯一的例外是每个个体都恰好有一个后代的平凡情况（这时族系只是一个接一个地永远延续下去）；如果平均值大于 1，则分支过程以正概率存活下去。后代数目的平均值就是流行病学中的*繁殖数*（reproduction number）R：$R > 1$ 的疫症有可能大规模爆发，但即使如此，早期的爆发仍可能纯粹因为偶然而无疾而终，其概率正好由上面的不动点方程给出。在核物理学中，如果每次裂变平均恰好引发另一次裂变，连锁反应就处于*临界*（critical）状态，而操作反应堆的学问，就在于让它一直保持在这个状态。

高尔顿、Watson 与 Bienaymé

高尔顿的问题在 1874 年由 Henry William Watson 牧师作答，但答案有部分是错的：他找到了不动点方程，却漏掉了第二个根，因而断定每个姓氏最终都会失传。其实正确的分析早在 1845 年已由法国统计学家 Irénée-Jules Bienaymé 提出，只是他的研究一直被人遗忘，直到 1970 年代才重见天日。这个模型现在称为*高尔顿—Watson 过程*（Galton–Watson process，有时称为 Bienaymé–Galton–Watson 过程），是每一门随机过程（random processes）课程中的核心例子。

延伸练习

1 **一般情况下的灭绝。**设后代数目的分布为 $\mathrm{B}(2, p)$，证明当 $p \le \frac{1}{2}$ 时灭绝概率为 1，而当 $p > \frac{1}{2}$ 时灭绝概率为 $\left(\frac{q}{p}\right)^2$。

2 **方差（variance）。**证明 $\mathrm{Var}(X_n)$ 满足 $\mathrm{Var}(X_n) = (2p)^2\mathrm{Var}(X_{n-1}) + 2pq\,\mathrm{E}(X_{n-1})$，并求 $p = \frac{1}{2}$ 时的方差。

3 **在第 n 代或之前灭绝。**设 $e_n = \mathrm{P}(X_n = 0)$。证明 $e_n = \mathrm{G}(e_{n-1})$，并就 $p = \frac{3}{4}$ 计算 e_1、e_2、e_3。它们是否趋近 $\frac{1}{9}$？

4 **姓氏。**如果每个男人有 0、1、2 或 3 个儿子的概率各为 $\frac{1}{4}$，他的姓氏最终失传的概率是多少？

延伸阅读

- **Geoffrey Grimmett & David Stirzaker, *Probability and Random Processes***（Oxford University Press），论分支过程的一节。
- **Adam Kucharski, *The Rules of Contagion***（Profile）。讲述繁殖数与疫症爆发，适合一般读者。
- **David Kendall, “Branching processes since 1873”**，*Journal of the London Mathematical Society* 41 (1966)。讲述这段历史，包括 Bienaymé 的贡献。

完整的引导式解答见第 12.15 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch12/branching.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com