12.14 混合策略

工作纸

题目

STEP I 1989，第 16 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/89-s1-q16

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有停一停，试一试的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想** 写出一个表，列出每一对猜测之下 B 赢得的金额（B 的猜测列于左侧，A 的猜测列于顶端）。

阶段 1 对手固定猜同一个数

涵盖：第 (i) 部分

> **想一想** 就每一对猜测，把 B 的赢款列成一个表。如果 A 每次都说同一个数，B 应该选表中哪一项?

阶段 2 对手随机猜测

涵盖：第 (ii) 部分

想一想 如果 A 以概率（probability）$\frac{1}{3}$ 猜每一个数，那么当 B 说 j 时，B 的期望收益（expected gain）是多少？沿着表中的一行取平均。

阶段 3 一般情况

涵盖：第 (iii) 部分

> **停一停，试一试** 把 B 的期望赢款按 A 的猜测归类整理，得出 a_1、a_2、a_3 的系数（coefficients）。你能否选取各个 b_j，使这三个系数全部为零？检查一下这三条方程是否独立（independent）。

背后的数学

极小极大定理

在一个二人零和（zero-sum）博弈中，设得失矩阵（payoff matrix）为 M，B 选取概率 $\mathbf{b}$，A 选取概率 $\mathbf{a}$，则 B 赢得金额的期望值是 $\mathbf{b}^{\mathsf{T}} M \mathbf{a}$。冯纽曼的极小极大定理指出

$$\max_{\mathbf{b}} \min_{\mathbf{a}} \mathbf{b}^{\mathsf{T}} M \mathbf{a} = \min_{\mathbf{a}} \max_{\mathbf{b}} \mathbf{b}^{\mathsf{T}} M \mathbf{a}.$$

用文字说：B 预先公开自己的随机化策略而仍能保证取得的金额，等于 A 预先公开自己的策略而能把 B 压制到的金额。这个共同的数值称为博弈的值（value）。在本题中，由反对称性可知博弈的值是 0，而策略 $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ 对双方都是最优的。这个定理可用线性代数（linear algebra）和凸性（convexity）证明（它等价于线性规划（linear programming）的对偶定理），而它推广到多人博弈的版本，即纳殊均衡（Nash equilibrium），为纳殊（John Nash）赢得诺贝尔经济学奖。

为甚么要随机化？

这里的随机性无关运气，而是关乎信息。如果 B 的选择可以被预测，A 便能加以利用；B 以恰当的概率随机选择，既令自己的选择无从预测，又确保任何预测都帮不了对手。现实中的例子包括足球的十二码罚球——对职业球员的研究发现，主射球员和守门员在左右两边之间随机选择，比例与博弈论的最优值十分接近——以及网球的发球。

冯纽曼 1928 年的论文

冯纽曼在 1928 年证明了极小极大定理，论文题为“On the theory of games of strategy”（论策略博弈的理论），研究动机来自扑克，因为扑克中的“偷鸡”（bluffing，即虚张声势）正是一种随机化。1944 年，他与经济学家 Oskar Morgenstern 出版了 *Theory of Games and Economic Behavior*（博弈论与经济行为），博弈论自此成为一门学科。冯纽曼后来忆述，他一直视极小极大定理为关键结果，没有它，就没有值得发表的博弈理论。

延伸练习

1 **A 的最佳应对。**若 B 采用 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$，证明 A 的每一种策略所得的期望值都是 0。若 B 改用 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$，求 A 的最佳应对。

2 **包剪揼。**写出“包剪揼”的得失矩阵，并求最优策略。为甚么这里的最优策略是均匀的，而本题的却不是？

3 **唯一性。**证明 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ 是 B 能保证不输的唯一策略。（提示：它必须令 X、Y、Z 全部非负；利用 $X + 2Y + Z = 0$。）

4 **改动后的博弈。**若相差 2 时的罚款由 £2 改为 £3，求最优策略。

延伸阅读

- **Ken Binmore, *Playing for Real***（Oxford University Press）。一本详尽而平易近人的博弈论入门书。
- **Avinash Dixit & Barry Nalebuff, *The Art of Strategy***（Norton）。以体育和商业的例子讲解博弈论。
- **William Poundstone, *Prisoner's Dilemma***（Anchor）。冯纽曼、博弈论与冷战。

完整的引导式解答见第 12.14 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch12/mixed-strategies.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com