12.13 三人决斗

工作纸

题目

STEP II 1995，第 12 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/95-s2-q12

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有停一停，试一试的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想** 在一场二人决斗中，Percy 先掷。他要么一掷即中，要么两人都掷失，于是局面完全重演。试写出一条关于 Percy 胜出概率（probability）的方程。

阶段 1 决斗

涵盖：二人决斗

> **想一想** Percy 先掷。要么他一掷即中，要么两人都掷不中，局面回到起点。就他获胜的概率（probability）列出一条方程，然后求解。

阶段 2 Algernon 的三个选择

涵盖：第 (i)、(ii)、(iii) 部分

> **停一停，试一试** 在每种情况下，剩下的是谁？下一个由谁来掷？套用决斗公式时，要认清先掷的是谁。在情况 (iii) 中，按 Bertie 是否掷中 Cuthbert 分开讨论。

阶段 3 建议

涵盖：Algernon 的最佳策略

> **想一想** Algernon 能选择的是瞄准谁，而不是掷中谁。假如他瞄准 Cuthbert，把掷不中的可能也计算在内，他整体的胜算是多少？再与故意掷失作比较。

背后的数学

策略与博弈论

三人决斗展示了博弈论的核心思想：最佳行动取决于其他参与者会如何回应。掷中最危险的对手 Cuthbert 看似理所当然，但这样做会改变局势，反而对 Algernon 不利。在本题中，Bertie 和 Cuthbert 的策略（strategy）是固定的（他们互相瞄准）；在完整的博弈论分析中，每个参与者都会自行选择策略，并且知道其他人也在这样做。这类分析始于冯·诺伊曼（John von Neumann）与摩根斯坦（Oskar Morgenstern）在 1944 年的工作，以及纳殊（John Nash）在 1950 年的工作，如今已成为经济学、演化生物学和政治学的基础。

强大反成弱点

三人决斗中谁会胜出？若 Algernon 采用最佳方案，Algernon 胜出的概率是 $\frac{226}{475}$，Bertie 是 $\frac{135}{475}$，Cuthbert 是 $\frac{114}{475}$。准头最好的人最不可能幸存，因为凡是可以选择目标的人都会瞄准他。同样的规律也见于有多名候选人的选举、企业之间的竞争，以及自然界：最强的竞争者可能成为首个被攻击的目标。Martin Shubik 在 1950 年代把三人决斗引入博弈论，并借此探问：最适者是否必然生存？

延伸练习

1 **Bertie 与 Cuthbert。**验证：若 Algernon 故意掷失，Bertie 胜出的概率是 $\frac{135}{475}$，Cuthbert 胜出的概率是 $\frac{114}{475}$。

2 **准头较好的投手。**假如 Algernon 掷中的概率是 a 而不是 $\frac{2}{5}$，当 a 取哪些值时，故意掷失仍然是他最佳的第一步？

3 **Bertie 应该瞄准 Cuthbert 吗？**已知 Algernon 故意掷失，Bertie 瞄准 Cuthbert 而不瞄准 Algernon，是否对他自己有利？（假设 Cuthbert 的行为不变。）

4 **投掷次数有限的决斗。**在一场每人只可掷两次的二人决斗中，求 Percy 胜出的概率，并与不限次数的决斗比较。

延伸阅读

- **D. Marc Kilgour & Steven Brams，“The truel”**，*Mathematics Magazine* 70 (1997)。一篇浅白易读的三人决斗综述。
- **Avinash Dixit & Barry Nalebuff，*Thinking Strategically***（Norton）。写给一般读者的博弈论读物，当中也谈到三人决斗。
- **Ken Binmore，*Game Theory: A Very Short Introduction***（Oxford University Press）。

完整的引导式解答见第 12.13 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch12/truel.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com