12.12 何时停止寻找

工作纸

题目

STEP I 2001，第 14 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/01-s1-q14

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有*停一停，试一试*的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想** 在随机次序之下，全体之中最好的应征者落在最先面试的 n 位之中的概率是多少？

阶段 1 前 n 人中的最佳者就是全体最佳者

涵盖：第 (i) 部分

> **想一想** 前 n 人中的最佳者，在甚么情况下同时是全体最佳者？全体最佳者出现在各个位置的可能性是否均等？

阶段 2 最佳或次佳

涵盖：第 (ii) 部分，以及 $N = 4$、$n = 2$ 的情况

> **停一停，试一试** 前 n 人中的最佳者是全体次佳者，当且仅当次佳者在前 n 人之中，而最佳者不在其中。求出这个概率（probability），再与第 (i) 部分的结果相加。对于 $N = 4$，列出最优秀的两位应征者（candidate）可能身处的位置。

阶段 3 最优策略

涵盖：题目以外

? **想一想** 先拒绝最初的 r 位应征者，然后录取其后第一位比他们全部都优秀的人。若最佳者位于第 $k > r$ 位，他在甚么情况下会被选中？以 $k-1$ 代替 N，套用第 (i) 部分的结果。

背后的数学

最优停止

秘书问题（secretary problem）是*最优停止*（optimal stopping）的奠基例子：根据随时间陆续到来的信息，决定何时采取行动，以使期望回报最大。可以证明，在*所有*策略之中（而不只是“先拒绝 r 位，然后取录下一位至今最佳者”这一类），这种阈值规则（threshold rule）是最优的，论证的方法是由最后一位应征者开始向前逆推。同样的数学也决定了何时卖出股票、何时行使金融期权，以及应该花多久去找泊车位。一个值得注意的特点是，在极限之下答案与 N 无关：不论应征者有一百位还是一百万位，你成功的概率都是 $\frac{1}{e}$。

各种变化

如果你只要选中顶尖两位应征者的其中一位便满意，最佳策略大约有 57% 的机会成功。如果你想做到的不是使选中最佳者的机会最大，而是使所选应征者的期望*名次*最优，最优策略便复杂得多，而期望名次趋向大约 3.87（Chow、Moriguti、Robbins 和 Samuels，1964）。如果你有一定的概率可以回头召回已被拒绝的应征者，又或者你知道应征者分数的分布（即“完全信息”问题），答案又会不同。练习中的雪糕题是最简单的情形：只拒绝一个，然后取下一个比它好的。

是谁解决的?

这个问题在 1950 年代流传于数学家之间，马丁·加德纳（Martin Gardner）于 1960 年以“googol 游戏”之名把它普及开来（在纸条上写下数字；你的对手逐张翻开，并且必须在最大的那个数出现时停下）。Thomas Ferguson 的文章“Who solved the secretary problem?”(1989) 追溯了它错综复杂的历史；有一种说法指，天文学家开普勒 (Johannes Kepler）在 1611 年挑选第二任妻子时，会见了十一位人选，最后向第五位求婚。

延伸练习

1 **雪糕。**试做 STEP II 2006，第 13 题（step.maths.org/questions/06-s2-q13）：这是秘书问题的小型版本，规则很简单。拒绝第一个，然后取第一个胜过它的。

2 **较小的 N。**当 $N = 4$ 时，求 r 的最佳值和成功的概率。用列举法验算。

3 **最佳或次佳。**利用第 (ii) 部分，论证“最先 n 位中的最佳者是顶尖两位之一”的可能性远高于“最先 n 位中的最佳者就是最佳者”。这对于选中顶尖两位之一的策略有甚么启示?

4 **精确的最大值。**当 $N = 10$ 时，从图中验证 $r = 3$ 是最优的。当 $N = 100$ 时，证明 $r = 37$ 是最优的（准确至四位小数，$r = 36$、37、38 的成功概率分别是 0.3710、0.3710、0.3708）。

延伸阅读

- **Thomas Ferguson，“Who solved the secretary problem?”**，*Statistical Science* 4（1989）。历史与各种变化；可在网上免费阅读。
- **Brian Christian & Tom Griffiths，*Algorithms to Live By***（William Collins）。把最优停止及其他算法应用于日常决策。
- **Martin Gardner，*New Mathematical Diversions***（Mathematical Association of America）。googol 游戏。

完整的引导式解答见第 12.12 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch12/secretary.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com