# 12.11 邮票、杯子与 $e$

## 工作纸

### 题目

**STEP I 1996，第 13 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/96-s1-q13

## 提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有*停一停，试一试*的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想** 若 $N = 4$，必须发生甚么事？概率是多少？

### 阶段 1 分布（distribution）

涵盖：$N$ 的分布

> **想一想** 要使 $N = k$，Jim 必须在杯子数目为 $2, 3, \ldots, k-1$ 时全部猜对，而在有 $k$ 个杯子时猜错。把这些概率（probability）相乘。

### 阶段 2 期望值（expectation）

涵盖：期望值

> **停一停，试一试** 化简 $k \cdot \frac{k-1}{k!}$。你得到的是哪一个著名的级数（series）？

**阶段 3 方差（variance）**

涵盖：方差

> ? **想一想** 利用 $k^2 = k(k-1) + k$ 求出 $\mathrm{E}(N^2)$，或者先求 $\mathrm{E}\big(N(N-1)\big)$。

## 背后的数学

### 换了装扮的同一个分布

从 $[0,1]$ 中均匀（uniformly）地随机选取数 $U_1, U_2, \ldots$，并设 $M$ 为令它们的总和超过 1 所需的个数。首 $k$ 个数之和小于 1 的概率，就是区域 $\{u_1 + \cdots + u_k < 1, u_i \geq 0\}$ 的体积，即 $\frac{1}{k!}$（面积为 $\frac{1}{2}$ 的三角形、体积为 $\frac{1}{6}$ 的四面体，如此类推）。所以

$$\mathrm{P}(M > k) = \frac{1}{k!}, \qquad \mathrm{P}(M = k) = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = \frac{k-1}{k!},$$

正正就是 $N$ 的分布。在两个问题中都有 $\mathrm{P}(N > k) = \frac{1}{k!}$：就杯子而言，这是连续猜中 $k-1$ 次的概率。利用 $\mathrm{E}(N) = \sum_{k \geq 0} \mathrm{P}(N > k)$（Section 9.9 中的一条公式），一行便得出 $\mathrm{E}(N) = \sum \frac{1}{k!} = e$。

### 为何 $e$ 不断出现

每当概率中含有 $\frac{1}{k!}$，不论它来自 $k$ 件物件按某个特定次序排列、$k$ 个概率依次为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ 的相继事件，还是单纯形（simplex）的体积，对 $k$ 求和都会产生指数级数。错排（derangements，Section 9.8）给出 $\sum \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1}$；这里我们则有 $\sum \frac{1}{k!} = e$。至于形如 $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to e^{-1}$ 的极限（limit），它们源自大量独立而不大可能发生的事件，正好解释了秘书问题和泊松分布中的 $e$。

**蒙地卡罗 $e$**

“总和超过 1”这个问题提供了一个以实验估计 $e$ 的方法：产生随机数，数一数需要多少个才超过 1，重复多次，然后取平均值。它是蒲丰投针（Buffon's needle，Section 12.20）的近亲，后者用来估计 $\pi$。这类蒙地卡罗（Monte Carlo）方法以赌场命名，利用随机抽样来估计难以直接计算的量；如今它们广泛应用于科学的各个范畴，由粒子物理学到金融，主要用于计算高维积分。

## 延伸练习

1 **生成函数。**证明 $\mathrm{E}(t^N) = 1 + (t-1)e^t$，并用它求 $\mathrm{E}(N)$ 和 $\mathrm{E}(N(N-1))$。

2 **尾部公式。**对于取非负整数值的随机变量（random variable），证明 $\mathrm{E}(N) = \sum_{k\geq 0} \mathrm{P}(N > k)$，并用它一行求出 $\mathrm{E}(N)$。

3 **由一个杯子开始。**假如游戏由一个杯子开始（Jim 不可能猜错），分布会有甚么改变？价钱的期望值是多少？

4 **单纯形。**证明 $\{u_1 + u_2 + u_3 < 1, u_i \geq 0\}$ 的体积为 $\frac{1}{6}$，并用归纳法（induction）证明 $k$ 维的情况为 $\frac{1}{k!}$。

## 延伸阅读

- **Eli Maor, *e: The Story of a Number***（Princeton University Press）。$e$ 的历史，包括它在概率中的各次现身。
- **Geoffrey Grimmett & Dominic Welsh, *Probability: An Introduction***（Oxford University Press），关于生成函数。
- **Paul Nahin, *Digital Dice***（Princeton University Press）。以蒙地卡罗模拟解决的概率谜题。

完整的引导式解答见第 12.11 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch12/stamps-and-e.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com