12.10 把绳头系起来

工作纸

题目

STEP III 2008，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/08-s3-q13

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有*停一停，试一试*的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想** 把两个绳头绑在一起之后，还剩下多少条绳子（结成环的不再算作一“条”）？这是否取决于有没有结成环？

阶段 1 第一个结

涵盖：第一步

> **想一想** 绳端共有 $2n$ 个。任选其中一个：其余的绳端当中，有多少个与它打结后会形成一个环？

阶段 2 所有的结

涵盖：环的数目的期望值（expected number）

停一停，试一试 每打一个结之后，不论有否形成环，还剩下多少段各有两个绳端的绳子？那么，在剩下 k 段绳子时所打的那个结，形成环的概率（probability）是多少？把各个期望值加起来。

阶段 3 方差

涵盖：方差（variance）

想一想 某一个结形成环的概率，是否取决于之前各个结的结果？如果不是，你对各个方差可以作出甚么结论？

阶段 4 四万条绳子

涵盖：$n = 40\,000$ 的情况

想一想 把 $1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$ 写成直至 $2n$ 为止的所有倒数（reciprocal）之和，减去分母为偶数的那些。利用 $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} \approx \ln m$。

背后的数学

对数增长

绳环数目的期望值以 $\frac{1}{2}\ln n$ 的速度增长，而方差与平均值相当接近（两者都是一些很小的概率之和）。根据中心极限定理（central limit theorem）（Section 12.24），当 n 很大时，绳环数目近似服从正态分布（normal distribution），平均值和方差都约为 $\frac{1}{2}\ln(4n)$。若有 40 000 条绳子，你通常会得到 2 至 11 个环。

随机置换的循环

同一个对数也出现在 n 件物件的随机置换（random permutation）的循环（cycle）数目之中：平均有 $H_n \approx \ln n$ 个（绳子问题是它的近亲，对应的是 $\frac{1}{2}\ln n$）。随机置换的循环很少：通常有一个巨大的循环包含了大部分元素，而最大循环所占元素的比例，平均约为 0.62，即 Golomb–Dickman 常数。随机地把绳子绑在一起，情况也是一样：大部分绳子最终都落在一两个长圈之中。这些事实属于*随机组合结构*（random combinatorial structures）的研究范围，而这门学问又与数论（number theory）有关（一个随机整数的质因数，其表现就像一个随机置换的循环）。

随机纽结与聚合物

绑绳子问题是某些物理系统的简化模型。溶液中的长链聚合物分子会首尾相接，形成环和链，而成环的统计规律也遵从类似的法则。在纽结理论（knot theory）中，数学家问

的是一个更难的问题：一个随机的闭合圈有多大机会打了结？对于很长的随机圈，答案趋向 1，这个结果由 De Witt Sumners 和 Stuart Whittington 于 1988 年证明。

延伸练习

1 **小的情况。**对于 $n = 2$，列出所有可能情况，并验证绳环数目的期望值是 $\frac{4}{3}$。

2 **一个大圈。**证明整个过程最终得到单一个包含所有绳子的圈的概率是 $\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{2k-1}\right)$，并证明当 n 很大时，这个概率约为 $\sqrt{\frac{\pi}{4n}}$。（提示：找出这个乘积与 $\binom{2n}{n}$ 的关系。）

3 **置换的循环。**证明 n 件物件的随机置换的循环数目的期望值是 H_n，方法是逐个元素地构造这个置换（即“中国餐馆”构造法）。

4 **方差。**证明 $\operatorname{Var}(R) = \mathrm{E}(R) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2}$，并证明被减去的那个和趋向 $\frac{\pi^2}{8}$。

延伸阅读

- **Peter Winkler, *Mathematical Puzzles: A Connoisseur's Collection***（A K Peters），书中收录了这道绑绳子谜题。
- **Richard Arratia, Andrew Barbour & Simon Tavaré, *Logarithmic Combinatorial Structures***（European Mathematical Society）。讲述循环、质数与随机结构，可留待日后阅读。
- **Colin Adams, *The Knot Book***（American Mathematical Society）。纽结理论入门，内容包括随机纽结。

完整的引导式解答见第 12.10 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch12/loose-ends.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com