12.1 精确地取条件

工作纸

题目

STEP I 2007，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/07-s1-q13

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有停一停，试一试的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

想一想 从十一块圆片中取出四块。对于“四块都有编号”这个事件（event）而言，抽取的次序有没有影响？四块圆片组成的等可能（equally likely）组合共有多少个？

阶段 1 没有条件

涵盖：第 (i) 部分

想一想 四个圆牌组成的 $\binom{11}{4}$ 个等可能（equally likely）组合之中，有多少个是四个圆牌全部有编号的？

阶段 2 首先抽出 3 号

涵盖：第 (ii) 及 (iii) 部分

> **停一停，试一试** 一旦首先抽出的是 3 号圆牌，其余三个圆牌便是从余下十个之中随机抽出的三个。这十个之中有多少个有编号？数一数你想要的组合有多少个。

阶段 3 3 号已被抽出（在某个时刻）

涵盖：第 (iv) 部分

> **想一想** 3 号是何时抽出的，有没有关系？已知它在四个圆牌之中，对于其余三个，你可以说些甚么？

阶段 4　首先抽出的是有编号的圆牌

涵盖：第 (v) 部分

? **想一想**　已知第一个圆牌有编号，不论是哪个号码，其余三个圆牌是甚么？

阶段 5 **抽出了有编号的圆牌**

涵盖：第 (vi) 部分

> **停一停，试一试** 这个条件（condition）有所不同：它没有告诉你哪一个圆牌有编号。数一数至少有一个有编号圆牌的四个圆牌组合有多少个，以及恰好有两个的又有多少个。

背后的数学

男孩还是女孩的谜题

马丁·加德纳（Martin Gardner）在 1959 年提出这个问题：史密斯先生有两个孩子，其中至少一个是男孩；两个都是男孩的概率是多少？列出等可能的家庭组合 BB、BG、GB、GG，剔除 GG 后剩下三个，其中一个是 BB：答案是 $\frac{1}{3}$。但如果我们知道年长的孩子是男孩，答案就是 $\frac{1}{2}$。这正是我们这道题第 (vi) 和第 (v) 部分的缩影。加德纳后来承认，他最初提出的问题含糊不清：答案取决于我们是怎样得知有一个男孩的。如果我们随机遇上其中一个孩子，而他是男孩，答案是 $\frac{1}{2}$；如果我们问“你有没有至少一个儿子?”而对方回答有，答案就是 $\frac{1}{3}$。概率取决于产生信息的过程，而不仅是信息本身。

蒙提霍尔问题（Monty Hall）

概率中争议最多的谜题，背后也是同一个教训。在一个游戏节目中，三道门的其中一道后面有一辆汽车。你选了 1 号门。主持人知道汽车在哪里，他必定会打开另外两道门的其中一道，让你看到门后是一只山羊，并且必定会让你选择是否换门；当汽车就在你所选的门后，以致他有选择余地时，他会在另外两道门之间随机挑选。他打开了 3 号门，并让你改选 2 号门。你应该换吗？应该：换门后胜出的概率是 $\frac{2}{3}$。主持人选哪道门并非随机；这取决于汽车的位置，因而带有信息。确切的规则十分重要。如果主持人只要可以就一定打开 3 号门，那么看到 3 号门打开，1 号门和 2 号门就变得同样可能，换门后胜出的概率只有 $\frac{1}{2}$；然而，一个事先决定必定换门的参赛者，仍然有 $\frac{2}{3}$ 的机会胜出，因为换门胜

出，恰好就是第一次选错的时候。Marilyn vos Savant 在 1990 年于杂志专栏中给出这个答案时，收到数以千计的来信指她错了，其中有些更是出自数学家之手。用电脑模拟一次，或者仔细列出各个等可能的情况，就可以解决争议。

贝叶斯（Bayes）与拉普拉斯（Laplace）

条件概率(conditional probability)的系统化基础,是由托马斯·贝叶斯(Thomas Bayes)和皮埃尔–西蒙·拉普拉斯 (Pierre-Simon Laplace) 奠定的：贝叶斯的论文在他死后于 1763 年发表, 而拉普拉斯则在 1774 年以一般形式写出了现称为贝叶斯定理 (Bayes′ theorem) 的法则。安德烈·柯尔莫哥洛夫 (Andrey Kolmogorov) 在 1933 年提出的公理 (axioms), 是现今每一个大学课程的起点，当中定义 $\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A \cap B)/\mathrm{P}(B)$，而概率论的其余部分都建基于这个定义之上。下一节 Section 12.2 会展示贝叶斯定理在实际应用中的作用。

延伸练习

1 **推广。**设有 b 块空白圆片和 n 块有编号的圆片，从中抽出 k 块，证明 (iv) 和 (v) 的答案永远相等，并求出 (vi) 在甚么情况下与它们相等。

2 **星期二出生的男孩。**一个家庭有两个孩子，其中至少一个是在星期二出生的男孩。证明两个都是男孩的概率是 $\frac{13}{27}$。（列出 14×14 个等可能的情况，或者用巧妙的方法计数。）

3 **蒙提霍尔问题。**列出各个结果，验证 $\frac{2}{3}$ 这个答案。如果主持人不知道汽车在哪里，随机打开另外两道门的其中一道，而门后刚好是一只山羊，那又如何?

4 **两张 A。**一手 13 张的桥牌中至少有一张 A。这手牌中至少有两张 A 的概率是多少? 试与已知这手牌中有葵扇 A 时的概率比较。

延伸阅读

- **Jason Rosenhouse, *The Monty Hall Problem***（Oxford University Press）。讲述这道谜题、它的历史，以及它的众多变化。
- **Geoffrey Grimmett & Dominic Welsh, *Probability: An Introduction***（Oxford University Press），有关条件概率的各章。
- **Joseph Blitzstein & Jessica Hwang, *Introduction to Probability***（CRC Press；可于网上免费阅读）。对条件概率的处理十分出色，并载有许多悖论。

完整的引导式解答见第 12.1 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch12/conditioning.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com