11.9 安全抛物线

工作纸

题目

STEP II 2014，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/14-s2-q10

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停，试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

想一想　用 t 表示 x 和 y，然后消去 t。怎样用 $\lambda = \tan\theta$ 表示 $\sec^2\theta$?

阶段 1　固定 x，改变角度

涵盖：给定 x 上方的最大高度 Y

停一停，试一试　固定 $x > 0$，并把 y 看成只是 λ 的函数。它是哪一类函数? 求出它的最大值。(或者：关于 λ 的二次方程 (quadratic) 何时有实根 (real root)?)

阶段 2 区域

涵盖：图像与可到达的区域

想一想 画出曲线 Y 的草图：它的顶点（vertex）在哪里？它在何处与地面相交？哪些点可以到达？经过曲线下方的一点的轨迹（trajectory）有多少条？经过曲线上的一点的又有多少条？

阶段 3 最远的点

涵盖：与 O 的最远距离

> **想一想** 最远的点位于边界（boundary）上。把 x^2+Y^2 写成 $X=x^2$ 的函数。它是递增还是递减？它在边界上哪一处最大？

背后的数学

包络线

单参数曲线族（one-parameter family of curves）$\mathrm{F}(x,y,\lambda)=0$ 往往有一条*包络线*：一条与族中每个成员都相切的曲线。求法是联立解 $\mathrm{F}=0$ 和 $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \lambda}=0$，这正是我们对 λ 求 y 的极大值时所做的事。包络线在科学中随处可见。一杯咖啡表面上那条明亮的光曲线，就是反射光线的包络线，称为*焦散线*（caustic）。超音速飞机的音爆，由它所发出声波的包络面传送，那就是*马赫锥*（Mach cone）。而在 Section 8.1 中，一个微分方程（differential equation）的一族解的包络线，本身也是一个解，即所谓的“奇异”解。

焦点

安全抛物线有一个奇妙的性质：它的焦点就是发射点 O。（抛物线 $y=c-\frac{x^2}{4c}$ 的焦点位于原点；这里 $c=\frac{u^2}{2g}$。）每条轨迹也都是抛物线，而所有轨迹的焦点都落在以 O 为圆心、半径为 $\frac{u^2}{2g}$ 的圆上。这可以用能量来解释：抛射体在高度 y 时的速率是 $\sqrt{u^2-2gy}$，在准线（directrix）的高度 $\frac{u^2}{2g}$ 处为零；而以同一条直线为准线并且经过 O 的抛物线，其焦点都在那个圆上。

托里拆利的抛物线

伽利略（Galileo）在 1609 年前后证明了抛射体沿抛物线运动，并且在水平地面上，最大射程出现在 45°。他的学生托里拆利（Evangelista Torricelli）以发明气压计而较为人

熟悉，他在 1644 年的著作 *De motu gravium* 中发现了安全抛物线。对炮手来说，它回答了一个实际问题：究竟哪些目标在射程之内？托里拆利还证明了，经过给定一点的轨迹成对出现，两者的角度关于该点的方向与铅垂线之间的角平分线对称，这就是本题中的高射和低射。

延伸练习

1 **爆开的烟花。**试做 STEP II 2023，第 10 题（载于 OCR 提供下载的 2023 年试卷，www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip）。这道题把爆炸产生的粒子看成一个球面，其球心作自由下落，并找出一颗沿着安全抛物面（paraboloid of safety）运动的粒子。

2 **向斜坡上发射。**求速率为 u 的抛射体沿倾角为 β 的斜面向上发射时的最大射程。（提示：直线 $y = x\tan\beta$ 与安全抛物线在哪里相交？）证明最佳角度平分斜坡与铅垂线之间的夹角。

3 **两个角度。**证明能到达点 P 的两个角度，关于 OP 与铅垂线夹角的平分线对称。

4 **焦点。**证明抛射角为 θ 的轨迹，其焦点位于 $\left(\frac{u^2}{2g}\sin 2\theta, -\frac{u^2}{2g}\cos 2\theta\right)$，并由此证明这些焦点都落在以 O 为圆心的一个圆上。

延伸阅读

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***（Cambridge University Press），第 3 章，当中讨论了轨迹的包络线。
- **J. W. Bruce, P. J. Giblin & C. G. Gibson, "On caustics of plane curves"**, *American Mathematical Monthly* 88 (1981)。几何学中的包络线与焦散线。
- **E. H. Lockwood, *A Book of Curves***（Cambridge University Press）。包络线、焦散线及许多经典曲线，并附作图方法。

完整的引导式解答见第 11.9 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch11/safety-parabola.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com