11.8 倾斜的平衡

工作纸

题目

STEP III 2025，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2025 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停，试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　一个立体放在桌上，只以其曲面上的一点 X 与桌面接触。作用于它的力是它的重量（作用于质心 G）和在 X 的反作用力（reaction）。这两个力何时平衡？

阶段 1 质心

涵盖：第 (i) 部分

想一想 把立体切成半径为 x、厚度为 δx、高度为 y 的薄圆柱壳（cylindrical shell）。每个圆柱壳的体积是多少？它的质心（centre of mass）有多高？

想一想 用积分求出体积和对底面的矩（moment），然后相除。

阶段 2 法线与轴的交点

涵盖：第 (ii) 部分

想一想 求曲线在 $x = rp$ 处的斜率，从而求出法线（normal）的斜率。沿着法线走到 y 轴：y 改变了多少？

停一停，试一试 当 $n = 4$ 时，把你求得的 Y 对 p 求导，以找出它的最大值。当 $p \to 0$ 时以及在 $p = 1$ 处，情况如何？

阶段 3 陀螺

涵盖：第 (iii) 部分：质心

想一想 这个立体由第 (i) 部分的两件立体组成，其中一件上下倒置。利用你求得的体积和质心来找出 G。

阶段 4　数算平衡位置

涵盖：第 (iii) 部分：倾斜的平衡位置

> **停一停，试一试**　立体能够以某一点接触平面而静止，当且仅当该点的法线通过 G。在曲面的每一部分上，有多少个点的法线与轴相交于 G 的高度？利用你在第 (ii) 部分的答案。平衡（equilibrium）位置的数目由此可得。

背后的数学

平衡位置即临界点

当立体以点 X 着地而静止时，G 离桌面的高度就是由 G 到在 X 的切平面（tangent plane）的距离；对凸体来说，当 GX 沿着法线时，这个距离就是 $|GX|$。一般而言，平衡位置就是由 G 到曲面的距离的*临界点*（*critical points*）：使 $|GX|$ 取驻值的点 X，正好就是法线通过 G 的点。稳定的平衡位置是这个距离的局部极小值（G 尽可能低），而不稳定的则是局部极大值或鞍点（saddle points）。

沿着截面由 A 走到 B，与 G 的距离依次是：在 A 较大（极大值：以尖端平衡，不稳定），在尖底上的倾斜点较小（极小值，稳定），在边缘较大，在圆顶上较低的倾斜点较小（稳定），在较高的倾斜点较大（不稳定），而在 B 较小（稳定：以圆顶的顶部着地）。正如图中所示，极小值和极大值必定交替出现。（事实上还有一个题目没有计算在内的平衡位置：立体可以不稳定地平衡在它尖锐的边缘上，曲面在那里没有唯一的法线。）

Gömböc

一个凸体最少可以有多少个平衡位置？任何物体都至少有一个稳定位置和一个不稳定位置：就是曲面上离 G 最近和最远的点。密度均匀的二维凸形状总是至少有四个（距离的两个极小值和两个极大值，交替出现）。1995 年，阿诺尔德（Vladimir Arnold）提出一个问题：密度均匀的三维凸体，能否只有两个平衡位置，即一个稳定、一个不稳定？2006

年，Gábor Domokos 和 Péter Várkonyi 构造出这样的一个形体，就是 *Gömböc*：无论以甚么姿势把它放下，它都会滚动摇晃，直至到达它唯一的稳定位置为止。Domokos 后来留意到，有些陆龟的壳很接近这个形状，这有助牠们在被翻转后自行翻身。

阿基米德与浮体

对物体稳定性的研究可以追溯至阿基米德（Archimedes）。他在《论浮体》（*On Floating Bodies*）中，根据形状和密度，分析了一个浮着的抛物面（船身的一个模型）何时能稳定地直立，何时会翻侧。他只用几何便得出答案，当中涉及的正是本节所用的那种质心和法线的计算。造船工程师至今仍在运用他的想法，形式就是稳心（*metacentre*）：如果通过浮心（centre of buoyancy）的铅垂线与船的轴线的交点位于质心之上，船便是稳定的。

延伸练习

1 **不倒翁玩具。**试做 STEP II 1996，第 9 题（step.maths.org/questions/96-s2-q9）：一个置于半球上的圆锥，何时会自行回正？（提示：相对于半球的球心，G 必须在哪里？）

2 **球体。**对于均匀实心球体，每一条法线都通过球心。这说明它的平衡位置有甚么特点？如果球体的质心稍为偏离球心，又会怎样？

3 **椭圆。**证明一块椭圆形圆盘在其自身所在的平面内沿一条直线滚动时，恰好有四个平衡位置，并指出哪些是稳定的。

4 **两个抛物面。**把第 (iii) 部分的圆顶换成抛物面 $ry = r^2 - x^2$，使立体对 x-轴对称。证明 G 位于原点，求出倾斜的平衡位置，并解释为何它们成对出现，且每对的倾斜角相等。

延伸阅读

- **Péter Várkonyi & Gábor Domokos, “Static equilibria of rigid bodies: dice, pebbles, and the Poincaré–Hopf theorem”**, *Journal of Nonlinear Science* 16 (2006)。提出 Gömböc 的论文。
- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***（Cambridge University Press），论平衡与稳定性。
- **Chris Rorres, “Completing Book II of Archimedes’s *On Floating Bodies*”**, *Mathematical Intelligencer* 26 (2004)。阿基米德的稳定性分析，配以现代图解。

完整的引导式解答见第 11.8 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch11/tilted-equilibria.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com