11.7 杆中的辛普森法则

工作纸

题目

STEP II 1989，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/89-s2-q13

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停，试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

想一想　两个系统的质量相同、质心相同，而且对通过质心的每一条轴的转动惯量也相同。为甚么平行轴定理随即保证，它们对其他任何轴的转动惯量也相同？

阶段 1 棒

涵盖：均匀棒（uniform rod）

想一想 在两端各放质量 p，在中点放质量 q。令总质量相等，并令对通过中心的垂直轴的转动惯量（moment of inertia）相等。

停一停，试一试 现在检查通过中心的其他每一条轴。沿棒距离中心 r 的一点，与一条夹角为 ψ 的轴相距 $r\sin\psi$。这对两个转动惯量各有甚么影响？

阶段 2　矩形

涵盖：矩形薄片（rectangular lamina）

停一停，试一试　把薄片切成与其中一边平行的幼条。把每一幼条换成它的三个质点（particle）。沿每条直线上的质点加起来是甚么？现在用同样的方法，把这些再各自换成三个质点。

阶段 3　正方形对其对角线

涵盖：正方形对一条对角线

想一想　九个质点之中，哪些位于对角线上？其余的质点与对角线相距多远？

阶段 4 **非均匀棒**

涵盖：非均匀棒（non-uniform rod）

> **想一想** 在两端及中点各放质量。求出棒的总质量，以及它对其中一端的一阶矩和二阶矩（first and second moments）。令三者全部相等，然后求解。

背后的数学

辛普森法则

令质量分布的各阶矩吻合，与设计一条数值积分法则是同一个问题。一条法则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \approx w_0 f(-a) + w_1 f(0) + w_2 f(a)$ 若对 $f = 1, x, x^2$ 精确成立，就必须满足

$$w_0 + w_1 + w_2 = 2a, \qquad -aw_0 + aw_2 = 0, \qquad a^2 w_0 + a^2 w_2 = \tfrac{2}{3}a^3,$$

这正是棒所要满足的条件（其中 $f = 1, x, x^2$ 分别扮演质量、一阶矩和转动惯量的角色）。其解为 $w = 2a(\tfrac{1}{6}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{6})$：这就是辛普森法则。对称性还带来额外的收获：这条法则对 $f = x^3$ 也精确成立，因为两边都等于零，所以辛普森法则能精确地积分三次多项式，而它对光滑函数的误差与四阶导数成正比。因此，一根棒与它的三个质点不仅在质量、质心和转动惯量上吻合，连三阶矩也吻合。

高斯求积法与惯性张量

如果位置和质量都可以自由选择，两个质点便已足够：在 $\pm\frac{a}{\sqrt{3}}$ 两点各放一半质量。验算：$2 \cdot \frac{1}{2}m \cdot \frac{a^2}{3} = \frac{1}{3}ma^2$。这就是两点高斯－勒让德法则（Gauss–Legendre rule）$\int_{-a}^{a} f \approx a\big(f(-\frac{a}{\sqrt{3}}) + f(\frac{a}{\sqrt{3}})\big)$，它同样对三次多项式精确成立。高斯（Carl Friedrich Gauss）在 1814 年证明，只要巧妙地选取 n 个点，便能精确地积分次数为 $2n-1$ 的多项式；高斯求积法（Gaussian quadrature）如今已是数值分析（numerical analysis）的标准方法。

在力学中，一个物体对通过其中心的所有轴的转动惯量，都记录在一个 3×3 对称矩阵之中，称为惯性张量（inertia tensor）。两个物体若质量、质心和惯性张量都相同，对所有

力的反应便完全一样，这就是为甚么工程师在模拟中可以用几个质点取代一个复杂的部件。惯性张量的特征向量（eigenvector）就是*主轴*（principal axes），即物体可以绕之稳定旋转的轴。

延伸练习

1 **辛普森法则。**用只有一个区间的辛普森法则估算 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$，并与 $\frac{\pi}{4}$ 比较。验证这条法则对 $\int_{-1}^1 x^3\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_{-1}^1 x^2\,\mathrm{d}x$ 精确成立，但对 $\int_{-1}^1 x^4\,\mathrm{d}x$ 则不然。

2 **所有轴都一样。**证明正方形薄片对在其平面上通过中心的任何轴的转动惯量都是 $\frac{1}{3}Ma^2$。（*提示*：九个等效质点在旋转 90° 之下是对称的；这对一个关于 $\cos\psi$ 和 $\sin\psi$ 的二次式说明了甚么？）

3 **三角形。**证明一块质量为 M 的均匀三角形薄片，与位于其三边中点、质量各为 $\frac{1}{3}M$ 的三个质点动力等效。

4 **实心立方体。**为一个均匀实心立方体找出一个由 27 个质点组成的动力等效系统，并用它求出边长为 $2a$ 的立方体对其一条棱的转动惯量。

延伸阅读

- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***（Cambridge University Press），关于刚体和转动惯量的一章。
- **Endre Süli & David Mayers, *An Introduction to Numerical Analysis***（Cambridge University Press），关于数值积分的各章，包括辛普森法则和高斯求积法。
- **Philip Davis & Philip Rabinowitz, *Methods of Numerical Integration***（Dover）。经典参考书。

完整的引导式解答见第 11.7 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch11/simpsons-rod.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com