11.6 后旋

工作纸

题目

STEP III 1997，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/97-s3-q10

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停”或“试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　波子以 v 向前运动，并以 ω 向后旋转。波子的最低点相对桌面移动得多快？摩擦力朝哪个方向作用？

阶段 1 摩擦力的作用

涵盖：为两部分做准备

想一想 弹珠的最低点在桌面上滑动得有多快？方向如何？那么摩擦力（friction）朝哪个方向作用？

停一停，试一试 设摩擦力为 F。以 F 表示 $m\dot{v}$ 和 $I\dot{\omega}$，其中 $I = \frac{2}{5}ma^2$。摩擦力会令回旋（backspin）增加还是减少？

阶段 2　完全停下

涵盖：第 (i) 部分

? **想一想**　要完全停下，v 和 ω 必须在同一时刻变为零。两者各在何时变为零?

阶段 3 **滚回来**

涵盖：第 (ii) 部分

> **停一停，试一试** 如果回旋较大，当 v 变为 0 时弹珠仍在旋转，所以摩擦力会继续作用。当 $v + a\omega = 0$ 时滑动（sliding）便会停止：那是甚么时候？当时的 v 是多少？此后弹珠以恒速滚动（rolling）。

背后的数学

一个守恒量

要求最终速率，还有一个更快的方法。考虑波子对它与桌面接触点的角动量（angular momentum）。摩擦力 正正 作用于该点，所以对该点没有力矩，而法向反作用力（normal reaction）和重力都沿着通过该点的铅垂线作用。因此波子滑动期间，这个角动量守恒（conserved）。它等于 mva（来自球心的运动）减去 $I\omega$（后旋以负值计算）：

$$L = mav - \tfrac{2}{5}ma^2\omega.$$

当波子以速率 V 滚动时，$a\omega = -V$，角动量为 $maV + \tfrac{2}{5}maV = \tfrac{7}{5}maV$。令它等于初始值，

$$\tfrac{7}{5}maV = mav_0 - \tfrac{2}{5}ma^2\omega_0, \qquad V = \frac{5v_0 - 2a\omega_0}{7},$$

答案相同，却完全不必提及摩擦力的大小，甚至不必理会它是否恒定。最终速率单凭守恒便已确定；摩擦力只决定要花多少时间才达到这个速率。

桌球、保龄球与网球

同样的分析可以解释许多运动中的现象。桌球被击中正中央时，起初滑动，然后开始滚动，最终速率为初速的 $\frac{5}{7}$（在公式中取 $\omega_0 = 0$）。十瓶保龄球带侧旋掷出时，会沿球道滑行，到开始滚动时便“拐弯”。带上旋（topspin）的网球会急速下坠，不过这里的主要效应来自空气动力：旋转的球会使周围的空气偏转，这就是马格努斯效应（Magnus effect）。

科里奥利与桌球

科里奥利（Gaspard-Gustave Coriolis）如今因旋转参考系中的虚拟力（fictitious force）而为人所知（Section 11.5），他在 1835 年写了一整本关于桌球数学的书：*Théorie mathématique des effets du jeu de billard*。他证明了不少结果，其中包括：带旋转击出的球，在滑动期间沿抛物线运动，到滚动时才走直线；他亦精确地分析了本题的缩杆打法。研究这项运动的物理学家至今仍会引用此书。

延伸练习

1 **上旋。**若波子起初带的是向前的旋转 ω_0 而非后旋，求它最终的滚动速率。$v_0/(a\omega_0)$ 取甚么值时它会加速？

2 **桌球。**一个球被击中正中央，以 v_0 开始滑动而不带旋转。证明它最终以 $\frac{5}{7}v_0$ 滚动，并求动能（kinetic energy）损失的比例。（滚动时的动能为 $\frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$。）

3 **圆环。**对一个在自身所在平面内滚动的薄圆环重做本题，其 $I = ma^2$。现在 $v_0/(a\omega_0)$ 为何值时，它会以 $\frac{v_0}{7}$ 返回？

4 **缩杆打法。**桌球球杆必须击中球的甚么位置（在球心以上多高，以 a 表示），球才会从一开始便只滚不滑？（提示：考虑冲量（impulse）作用期间对接触点的角动量。）

延伸阅读

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***（Cambridge University Press），第 8 章，讲述角动量及带滑动的滚动。
- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***（Cambridge University Press），关于刚体运动的各章。
- **David Alciatore, *The Illustrated Principles of Pool and Billiards***（Sterling）。这项运动的物理学，附有大量图解。

完整的引导式解答见第 11.6 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch11/backspin.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com