11.5 加速火车中的重力

工作纸

题目

STEP II 2021，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2021 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有*停一停，试一试*的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　火车以加速度 a 向西（即沿负 x 方向）加速。对车上的观察者来说，质量为 m 的物体看似受到怎样的“假想”力作用？

阶段 1　在原点无法静止

涵盖：第 (i) 部分

> **想一想**　假如小珠相对于火车一直停留在原点，它就会与火车有相同的加速度（acceleration）。这需要怎样的力？在原点处金属线是水平的：它的反作用力（reaction）可以沿哪个方向作用？

阶段 2 一条能量方程

涵盖：第 (ii) 部分

停一停，试一试 在火车的参考系（frame）中写出牛顿第二定律（Newton's second law），加上因参考系加速而产生的力 ma，并包括法向反作用力（normal reaction）$\mathbf{N}$。然后与速度 $(\dot{x}, \dot{y})$ 取点积（dot product）。为甚么 $\mathbf{N}$ 会消失?

阶段 3 能升多高?

涵盖：第 (iii) 部分

想一想 由于小珠从原点由静止开始运动，常数为 0。在最高点，小珠瞬时静止。利用 $ky = x^2$。

阶段 4　最快的一点

涵盖：第 (iv) 部分

> **想一想**　把速率的平方写成只含 x 的函数。这个二次函数在哪里取得最大值？然后求金属线在该点的斜率（gradient）。

背后的数学

假想力

牛顿定律在*惯性参考系*（inertial frame）中成立，即没有加速的参考系。在加速参考系中，只要加上假想力，牛顿定律便可继续使用：对于加速度为 $\mathbf{A}$ 的参考系，要加上 $-m\mathbf{A}$；而在旋转参考系中，则要加上离心力（centrifugal force）和科里奥利力（Coriolis force）。它们之所以称为假想力，是因为没有任何物体施加这些力；它们纯粹是参考系造成的假象。但对身处其中的人来说，它们却是千真万确的。离心力使地球在两极变得扁平；科里奥利力决定了飓风旋转的方向（在北半球为逆时针），也令远程炮弹偏离原来的方向。

等效原理

恒定的假想力 $-m\mathbf{A}$ 与质量成正比，这一点与重力完全相同。在一个密封的箱子内，没有任何实验能够分辨箱子是静止在行星上，还是在虚空中加速：这就是*等效原理*（equivalence principle）。爱因斯坦以它作为广义相对论（general relativity）的出发点。既然光横越一个加速中的箱子时看来会弯曲，光在重力场中也必定会弯曲；既然加速火箭的前端和后端的时钟快慢不同，重力场中不同高度的时钟也必定如此。这两个预测都已得到证实，而每一颗 GPS 卫星都必须就第二个效应作出修正：单是这个效应，就令卫星上的时钟每天比地面的时钟快约 45 微秒。

爱因斯坦最快乐的想法

1907 年，爱因斯坦在伯尔尼的专利局工作，当时他正在撰写一篇关于狭义相对论（special relativity）的综述文章。据他后来忆述，就在这时，“我一生中最快乐的想法”出现了：一个从屋顶自由堕下的人，不会感觉到自己的重量。只要选取一个下堕中的参考系，重力就可以被“变换掉”。他再花了八年时间，并借助大量新的数学（由高斯（Gauss）和黎曼（Riemann）发展的弯曲空间微分几何），才把这个想法变成 1915 年的广义相对论。

延伸练习

1 **火车上的大炮。**试做 STEP I 2000，第 9 题（step.maths.org/questions/00-s1-q9）：在加速中的车厢内发射抛体（projectile），其中加速度的作用就如重力倾斜了一样。

2 **逆风。**试做 STEP II 2006，第 11 题（step.maths.org/questions/06-s2-q11）：抛体迎着恒定的风飞行，风可以在它落地之前把它吹回你这边。

3 **火车上的咖啡。**证明在加速中的火车上，一杯咖啡的液面是一个与水平面成 $\arctan(a/g)$ 角的倾斜平面。

4 **微小振动。**求珠子围绕 $x = \frac{ak}{2g}$ 作微小振动的周期。（提示：在新的底部附近，金属线近似于一个圆，其半径等于金属线在该处的曲率半径（radius of curvature）。）

延伸阅读

- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***（Cambridge University Press），当中讲述非惯性参考系与假想力的一章。
- **Albert Einstein, *Relativity: The Special and the General Theory***（有多个版本）。爱因斯坦亲自撰写的普及读物，当中包括加速箱子的讨论。
- **Pedro Ferreira, *The Perfect Theory***（Little, Brown）。一部广义相对论的传记。

完整的引导式解答见第 11.5 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch11/accelerating-frame.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com