11.4 等时曲线

工作纸

题目

STEP III 1994，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/94-s3-q9

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有停一停，试一试的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

? **想一想**　碗面是光滑的。有哪些力作用在质点上？其中哪些力有作功？

阶段 1　沿曲线的能量

涵盖：常数

? **想一想**　碗面是光滑（smooth）的。有哪些力作用在质点上？其中哪些力会作功？质点沿碗面的速率是 $\left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|$。写出能量守恒（conservation of energy）的式子。

阶段 2 以 s 表示的简谐运动（simple harmonic motion）

涵盖：到达 V 所需的时间

停一停，试一试 利用 $s = 2\sqrt{ky}$，把 y 换成 s 的函数。将能量方程对 t 求导。你得到的是哪一种运动？

阶段 3 到达底部所需的时间

涵盖：到达 V 所需的时间

想一想 质点到达 $s = 0$ 所需的时间，占一个周期（period）的几分之几？答案与 h 有关吗？

阶段 4　两个质点

涵盖：两个质点

想一想　两个质点各自在甚么时候到达 V？在 V 处的速率与起始高度有甚么关系？比较两者的动量（momentum）。

停一停，试一试　碰撞时总动量为零，因此其后一直保持为零。利用恢复系数（coefficient of restitution）α，求出刚碰撞后两个质点的速率。

阶段 5 **整个运动过程**

涵盖：两个质点

想一想 现在每个质点会爬升到多高？它们下一次在甚么时候到达 V？该次碰撞会发生甚么事？往后每一次碰撞又如何？

背后的数学

为甚么是摆线？

半径为 R 的轮子在一条直线下方滚动，描出摆线 $x = R(t + \sin t)$，$y = R(1 - \cos t)$。于是 $\frac{dx}{dt} = R(1 + \cos t)$ 及 $\frac{dy}{dt} = R \sin t$，所以沿曲线的速率是 $R\sqrt{2 + 2\cos t} = 2R \cos \frac{t}{2}$。积分后，由底部起计的弧长是 $s = 4R \sin \frac{t}{2}$，而 $y = 2R \sin^2 \frac{t}{2}$。因此 $s^2 = 8Ry$：摆线正是满足 $s = 2\sqrt{ky}$ 的曲线，其中 $k = 2R$。反过来说，要求回复力与 s 成正比，就迫使曲线必定是摆线。

最速降线

1696 年，约翰·伯努利（Johann Bernoulli）向欧洲的数学家提出挑战：一粒珠子从一点滑到较低的另一点（不在其正下方），沿哪一条曲线所需的时间最短？答案是最速降线（brachistochrone），它同样是一条摆线。据说牛顿（Newton）收到题目后，一个晚上就解决了；他匿名发表了自己的解法，但伯努利认出了作者，说是“从爪认出狮子”。这个问题是变分法（calculus of variations）的开山例子，你在 Section 4.7 已经见过：找出使某个由积分定义的量取最小值的曲线。

惠更斯的摆线钟

惠更斯知道单摆计时并不完美，因为它的周期取决于振幅。他在《*Horologium Oscillatorium*》（1673 年）中说明了怎样令摆锤沿摆线运动：把摆线挂在两块弯成摆线形状的“夹

板”之间，摆线便会贴着夹板卷绕，使摆锤本身描出一条摆线（摆线的渐伸线（involute）是另一条摆线）。实际上，夹板因摩擦而引入的误差比它消除的还要多，钟表匠于是改为保持小幅摆动。然而惠更斯的分析开创了渐屈线（evolute）与渐伸线的理论，他这部著作也是十七世纪力学的伟大作品之一。

延伸练习

1 **不同的高度。**一个质点在等时曲线碗内从高度 h 放开。证明它在 V 的速率是 $\sqrt{2gh}$（由能量守恒，必然如此），并验证这与 ωs_0 一致。

2 **普通的碗。**在半径为 R 的半球形碗内，比较从很小的高度到达底部所需的时间与从碗边出发所需的时间。哪一个较长？（利用 Section 11.3 的结果。）

3 **质量相等。**把题目的第二部分重做一次，这次两个质点质量同为 m，分别从高度 h_1 和 h_2 放开，恢复系数为 e。它们是否仍然总是在 V 碰撞？

4 **摆线的弧长。**证明摆线的一拱长度为 $8R$，而拱下的面积为 $3\pi R^2$，即滚动圆面积的三倍。

延伸阅读

- **George Simmons, *Differential Equations with Applications and Historical Notes***（CRC Press）。书中包括等时曲线和最速降线，并附有相关历史。
- **E. A. Whitman, “Some historical notes on the cycloid”**，*American Mathematical Monthly* 50 (1943)。讲述摆线为何被称为“几何学家的海伦”。
- **Paul Nahin, *When Least Is Best***（Princeton University Press）。以历史故事的方式讲述最速降线及其他最优化问题。

完整的引导式解答见第 11.4 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch11/tautochrone.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com