11.3 真实的摆

工作纸

题目

STEP III 1998，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/98-s3-q11

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有*停一停，试一试*的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　摆锤沿半径为 l 的圆周运动。以 θ 和 $\dot{\theta}$ 表示，它的速率和高度（相对于最低点）分别是甚么？

阶段 1　能量

涵盖：能量方程（energy equation）

> **想一想**　把摆锤（bob）的速率和高度用 θ 和 $\dot{\theta}$ 表示。当 $\theta = \gamma$ 时，摆锤处于静止。运用能量守恒（conservation of energy）。

阶段 2 以积分表示周期（period）

涵盖：周期

想一想 对两个余弦都使用 $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$。由 $\theta = 0$ 摆到 $\theta = \gamma$ 所需的时间占周期的几分之几？把时间写成 $\int \frac{\mathrm{d}\theta}{\dot{\theta}}$。

阶段 3 消去奇点（singularity）

涵盖：小振幅近似（small-amplitude approximation）

停一停，试一试 设 $k = \sin\frac{\gamma}{2}$ 及 $\sin\frac{\theta}{2} = k\sin\phi$。$\phi$ 需要取甚么范围？以 $\mathrm{d}\phi$ 表示 $\mathrm{d}\theta$。哪些因子可以约去？

阶段 4 第一个修正项

涵盖：小振幅近似

> **想一想** 当 k 很小时，用二项式定理（binomial theorem）展开 $(1-k^2\sin^2\phi)^{-1/2}$，保留两项。然后使用 $\int_0^{\pi/2}\sin^2\phi\,\mathrm{d}\phi$ 以及 $k\approx\frac{\gamma}{2}$。

背后的数学

椭圆积分

积分

$$K(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$$

称为*第一类完全椭圆积分*（complete elliptic integral of the first kind），这个名称的由来，是因为与它相近的另一个积分给出椭圆的周界。精确的周期是 $P=4\sqrt{l/g}\,K(\sin\frac{\gamma}{2})$。把被积函数完全展开，再利用 Section 4.4 中的沃利斯积分（Wallis integrals）$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}\phi\,\mathrm{d}\phi$ 逐项积分，便得

$$P=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\Big(1+(\tfrac{1}{2})^2k^2+(\tfrac{1\cdot3}{2\cdot4})^2k^4+(\tfrac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6})^2k^6+\cdots\Big).$$

$K(k)$ 无法以有限个熟悉的函数组合而成；它是一个名副其实的新函数。

高斯的非凡公式

计算 K 有一个好得多的方法。你在 Section 2.6 已见过*算术几何平均*（arithmetic–geometric mean）：由 a 和 b 开始，反复以它们的算术平均和几何平均取代它们。高斯在 1799 年发现

$$K(k)=\frac{\pi}{2\,\mathrm{AGM}(1,\sqrt{1-k^2})},$$

所以振幅为 γ 的单摆，其周期恰好是

$$P = \frac{2\pi\sqrt{l/g}}{\mathrm{AGM}(1, \cos\frac{\gamma}{2})}.$$

AGM 收敛得极快：摆幅在大约 160° 以内时，只需三四步便可求得准确至十位有效数字的周期，图 11.3.1（见网上该节的完整版）中的数值正是这样算出来的。接近 180° 时，两个初始值 1 和 $\cos\frac{\gamma}{2}$ 相距甚远，需要多走一两步，但即使在 179°，五步也已足够。高斯在日记中写道，这项发现“开辟了一个全新的分析领域”，而他说得一点不错：把椭圆积分反演，引领阿贝尔（Abel）和雅可比（Jacobi）发现了*椭圆函数*（elliptic functions），而椭圆函数又引出了*椭圆曲线*（elliptic curves）。椭圆曲线如今是数论的核心（它们正是证明费马最后定理（Fermat's Last Theorem）的关键），也是保障互联网安全的密码学的核心。

伽利略的吊灯与惠更斯的时钟

伽利略大约在 1602 年提出，单摆的周期与振幅无关；对于他所研究的小幅摆动，这是个很好的近似。惠更斯（Christiaan Huygens）意识到这并不精确，并在 1659 年找到了一条曲线，沿着它摆动时周期确实与振幅无关：那就是摆线（cycloid），即 Section 11.4 的主题。他由 1656 年起制造的摆钟，把计时的误差由每天约一刻钟减至约十五秒。航海天文钟（marine chronometer）解决了在海上测定经度的难题，它后来完全舍弃了单摆，但直至 1920 年代，摆钟仍然是世上最准确的计时器。

延伸练习

1 **系着的质点。**试做 STEP III 2015，第 9 题（step.maths.org/questions/15-s3-q9）：这个振子即使在小幅振动时，周期也取决于振幅。为甚么它会这样，而单摆却不会？

2 **下一项。**把二项式展开多取一项，证明 $P \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}(1 + \frac{\gamma^2}{16} + \frac{11\gamma^4}{3072})$。

3 **徒手计算 AGM。**用三步 AGM 估算振幅为 90° 的单摆的周期，并与图中的数值 1.1803 比较。

4 **时钟。**一座摆钟经调校后，在振幅为 4° 时走时完全准确。若它的振幅增至 5°，它每天会慢多少秒？

延伸阅读

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***（Cambridge University Press），第 4 章，当中讨论了大振幅的单摆。

- **Jonathan Borwein & Peter Borwein, *Pi and the AGM***（Wiley）。高斯的发现及其应用，包括计算 π 的最快方法。
- **Dava Sobel, *Longitude***（Fourth Estate）。海上计时的故事，讲述单摆以外的发展。

完整的引导式解答见第 11.3 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch11/real-pendulum.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com