11.2 简正模式

工作纸

题目

STEP III 2014，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/14-s3-q10

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有*停一停，试一试*的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　设 X 与 P 的距离为 $a+x$，Y 与 Q 的距离为 $a+y$，那么中间的弹簧 XY 有多长？当 x 和 y 皆为正数时，哪些弹簧被拉长，哪些被压缩？

阶段 1　运动方程（equations of motion）

涵盖：运动方程

> **想一想**　已知 $XP = a + x$ 及 $YQ = a + y$，那么 XY 有多长？哪些弹簧（spring）被拉长，哪些被压缩？求出每条弹簧作用于 X 的力，并小心留意方向。然后利用对称性（symmetry）处理 Y。

阶段 2 解耦（decoupling）

涵盖：组合 $x-y$ 与 $x+y$

> **停一停，试一试** 每条方程都同时含有 x 和 y。先把两式相减，再把两式相加。$x-y$ 和 $x+y$ 各自满足甚么方程?

阶段 3 初始条件（initial conditions）

涵盖：组合 $x-y$ 与 $x+y$

> **想一想** 开始时 x 和 y 分别是多少？两个质点（particle）当时是否在运动？利用这些资料确定你那两个解中的常数。

阶段 4 永不返回

涵盖：Y 永不返回

> **停一停，试一试** 把 y 用 t 表示。若 Y 要回到起始位置，两个余弦必须各等于甚么？这对 $\sqrt{3}$ 意味着甚么？

背后的数学

简正模态就是特征向量

把两条方程写成一条矩阵方程：

$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix} = -\frac{\lambda}{a}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.$$

能够解耦的组合，正是这个矩阵的特征向量（eigenvectors）：$(1,-1)$，其特征值（eigenvalue）为 1；以及 $(1,1)$，其特征值为 3（Section 7.2）。在第一个模态中，$x=-y$：两个质点沿直线同向运动（记住 x 和 y 是从相反的两端量度的），中间的弹簧长度保持不变。在第二个模态中，$x=y$：两个质点反向运动，把中间的弹簧一压一拉，频率因而较高。频率的平方就是特征值乘以 $\frac{\lambda}{ma}$。

无论有多少个质点和弹簧，这个方法都适用。一个由 N 个耦合振子（coupled oscillators）组成的系统有 N 个简正模态，它们由一个对称矩阵的特征向量给出，而谱定理（spectral theorem）保证这些模态必定存在，并且互相垂直。分子以简正模态振动，化学家正是凭分子所吸收的红外光来辨认它们。建筑物和桥梁也有简正模态，工程师必须令这些模态的频率远离风和地震的频率。当质点的数目趋向无限时，简正模态就变成振动弦线的谐波（harmonics），这正是傅里叶分析（Fourier analysis）的起点。

接近而不到达

虽然 Y 永远不会刚好返回，但它可以接近到任意程度。原因是克罗内克（Kronecker）的一条定理：若 α 是无理数，则各倍数 $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots$ 取模 1 之后，可以任意接近 $[0,1]$ 内的每一个数。因此我们可以找到一些时刻，使 ωt 是 2π 的倍数，而 $\sqrt{3}\,\omega t$ 与另一个这样的倍数之差小于任何指定的容许误差。这种运动是*准周期*（quasi-periodic）的：它在一个环面（torus）上不断缠绕（每个模态对应一个角），却永远不会闭合。有理与无理频率比之间的这种区别，同样是关于太阳系稳定性的 KAM 定理的核心。

延伸练习

1 **能量。**证明总能量 $\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{\lambda}{2a}\left(x^2+y^2+(x+y)^2\right)$ 是常数，并证明它可以分拆成两项之和，每个简正模态各占一项，而每一项本身都是常数。

2 **纯模态。**应该怎样让两个质点开始运动，才能使运动是周期性的，且周期为 $\frac{2\pi}{\omega}$？若周期为 $\frac{2\pi}{\sqrt{3}\,\omega}$ 又如何？

3 **较硬的中间弹簧。**若中间弹簧的弹性模量（modulus of elasticity）是 μ 而不是 λ，求两个简正模态的频率。当 μ/λ 取哪些值时，所有运动都是周期性的？

4 **三个质点。**三个质量相等的质点排成一线，由四条相同的弹簧连接在两个固定点之间。求对应的矩阵及其特征值 $(2-\sqrt{2},\,2,\,2+\sqrt{2})$，并描述三个简正模态。

延伸阅读

- **A. P. French, *Vibrations and Waves***（MIT Introductory Physics Series），第 5 章，讲述耦合振子与简正模态。
- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra***（Wellesley-Cambridge），关于特征值的一章，当中以弹簧与质点作为主要例子。
- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos***（CRC Press），第 8 章，讲述环面上的准周期运动。

完整的引导式解答见第 11.2 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch11/normal-modes.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com